# Introduction aux suites numériques

## I Définition et notations d'une suite numérique :

### 1 Définition et notations :

Vidéo de cours

**Définition intuitive :**

Une suite numérique est une liste de nombre réels, appelés des termes, qui sont " numérotés ".

**Exemple** :
Considérons cette suite de nombres : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ...
Le premier terme de cette suite est 1, le second est 3, ...

**Définition mathématique :**

Une fonction numérique $u : n \mapsto u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est appelée **suite numérique**.
Les images sont appelés des **termes** de la suite et sont notés $u(n)$.
Les antécédents $n$, des entiers naturels, sont appelés les **rangs** (ou les indices) des termes.

**Exemple :**

Dans l'exemple précédent, si on appelle $u(1)$ le premier terme, on aurait :
$u(1) = 1$ ; $u(2) = 3$; ...... $u(4) = 7$
$u(4)$ est le terme de rang 4.

**Notation :**

Comme les antécédents ne sont que des entiers naturels, qui vont permettre de numéroter les termes de la suite, on utilise une autre notation que celle utilisée pour les fonctions, qui devient trop lourde et peut prêter à confusion.
On écrira, pour tout $n$ pour lesquels la suite $(u_n)$ est définie :

$$u(n) = u_n$$

Et on lira $u$ indice $n$.

**Exemple :**

Dans l'exemple précédent, si on appelle $u_1$ le premier terme, on aurait :
$u_1 = 1$ ; $u_2 = 3$; ...... $u_4 = 7$
$u_4$ est le terme de rang 4.

**Attention au premier terme :**

Selon les situations, on pourra faire commencer la suite par $u_0$ ou $u_1$.
Attention, si $u_0$ est le premier terme, $u_1$ en est le 2ème, $u_2$ le 3ème et ainsi de suite.
En reprenant l'exemple précédent, on aurait alors : $u_0 = 1; u_1 = 3; \dots\dots u_3 = 7$
$u_3$ serait alors le terme de rang 4
Il y aurait un décalage entre l'indice du terme et le nombre de terme de la suite.

### S'évaluer

QCM 1

## II LES DEUX PRINCIPAUX MODES DE GÉNÉRATION D'UNE SUITE :

### 1 SUITE DÉFINIE PAR UNE FONCTION EXPLICITE :

Vidéo de cours

**Définition :**

Une suite $(u_n)$ est définie de manière explicite si son terme général s'écrit en fonction de $n$

**EXEMPLE :**

Reprenons encore l'exemple avec $u_1 = 1$ ; $u_2 = 3$ ; $u_3 = 5$ ; $u_4 = 7$ ......
Par quelle relation pourrions nous définir la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ ?

- Si le premier terme est $u_0$
  Pour tout entier $n$, on aurait : $u_n = 2n + 1$,
  Ainsi, $u_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$ ; $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ ; etc...
- Si le premier terme est $u_1$
  Pour tout entier $n$, on aurait : $u_n = 2n - 1$,
  Ainsi, $u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ ; $u_2 = 2 \times 1 - 1 = 3$ ; etc...

**Pratique !!**

L'intérêt d'une telle modélisation est de calculer facilement le terme de n'importe quel rang :
$u_{100} = 2 \times 100 + 1 = 201$, si le premier terme est $u_0$.

#### S'ENTRAÎNER - S'ÉVALUER

S'entraîner avec Mathalea

QCM 2

### 2 SUITE DÉFINIE PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE :

Vidéo de cours

**DÉFINITION :**

**Définition mathématique :**

Une suite $(u_n)$ est définie par récurrence si on connait son premier terme et si son terme général s'écrit en fonction de termes précédents.

**EXEMPLE :**

Reprenons encore la même suite $u_0 = 1$ ; $u_1 = 3$ ; $u_2 = 5$ ; $u_3 = 7$ ......
Comment passe-t-on d'un terme au suivant :
On peut exprimer cette suite ainsi : $u_1 = u_0 + 2$ ; $u_2 = u_1 + 2$ ; et $u_3 = u_2 + 2$ et ainsi de suite.
On ne définit plus le programme de calcul qui détermine $u_n$, pour n'importe quel $n$, mais plutôt l'algorithme qui fait passer d'un terme au suivant.

**Suite définie par récurrence**

Dans cet exemple, on pourrait écrire que la suite $u_n =$ est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$$

### Attention !

Il ne faut pas confondre $u_{n+1}$ qui est et $u_n+1$.

- $u_{n+1}$ est le terme de la suite d'indice $n+1$, le $n+1^{\text{ème}}$ terme si le premier terme est $u_1$.
- $u_n+1$ est le terme d'indice $n$ à qui on ajoute 1.

**Remarque :**

Pour définir une suite par une relation de récurrence, il faut évidemment donner l'algorithme de calcul qui permet de passer d'un terme d'indice $n$ à un terme d'indice $n+1$ par exemple, mais il faut aussi absolument donner un premier terme pour initialiser l'algorithme.
**Cette valeur initiale est indispensable**.
Définir une suite récurrente par : $u_{n+1}=u_n+2$ uniquement, ne permet pas de démarrer le moindre calcul, si on ne connaît pas un premier terme.

### S'entraîner - S'évaluer

S'entraîner avec Mathalea

QCM 3

## III Représentation graphique d'une suite

### 1 Utilisation de la calculatrice :

**Exercice 1**

Afficher à l'écran de la calculatrice les 10 premiers termes de $(u_n)$, définie pour tout entier $n$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2-5}{2} \end{cases}$$

Tutoriel vidéo

### 2 Représentation graphique d'une suite :

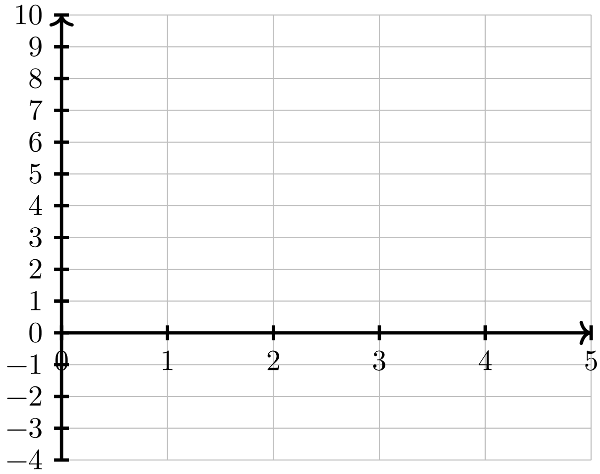
**Méthode :**

Comme pour représenter une fonction, on place les antécédents (donc les indices) en abscisses, et les images (donc les termes) en ordonnées.
La représentation graphique est donc constituée de points qu'on ne relie pas, puisqu'une suite n'est définie que pour des valeurs entières.

**Exercice 2**

Représenter graphiquement les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définie pour tout entier $n$ par

$u_n = 3n-4$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases}$




## IV Sens de variation d'une suite :

**Définitions :**

- Une suite $(u_n)$ est croissante sur $\mathbb{N}$, si et seulement si, pour tout $n$, $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite $(u_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$, si et seulement si, pour tout $n$, $u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite est monotone si elle est croissante sur $\mathbb{N}$ ou décroissante sur $\mathbb{N}$

Vidéo de cours

**Méthode 1 : étude du signe de $u_{n+1} - u_n$**

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

**Exercice 3**

En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$ donner le sens de variation de :

- $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ par $u_n = 2n + 4$

  ..........................................
  ..........................................
  ..........................................
  ..........................................
  ..........................................

- $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ par $u_n = n^2$

  ..........................................
  ..........................................
  ..........................................
  ..........................................
  ..........................................

- La suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

  ..................................................
  ..................................................
  ..................................................
  ..................................................
  ..................................................

**Méthode 2 : étude de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (vidéo 7)**

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_n)$ est croissante
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

Vidéo de cours

### Exercice 4

Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ par

- $u_n = 3^n$

- $\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_{n+1} = 0,9u_n \end{cases}$

**Méthode 3 : étude des variations de la fonction associée (vidéo 8)**

Soit $(u_n)$ une suite numérique définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

- Si la fonction $f$ est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite $(u_n)$ est croissante.
- Si la fonction $f$ est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite $(u_n)$ est décroissante.

Vidéo de cours

**Attention :**

- La réciproque de cette propriété est fausse.
- Cette méthode ne fonctionne pas avec les suites définies par récurrence.

### Exercice 5

Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ par $u_n = n^2 - n + 3$

### S'ÉVALUER

QCM 4