Manipuler les nombres réels :

2. Puissance d'un nombre réel :

I Généralités sur les puissances

1 Définition

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ (c'est à dire que a est un nombre quelconque)
et $n \in \mathbb{N}^*$ c'est à dire que n est un entier naturel différent de zéro.
Le nombre a, à la puissance n(on dit aussi " a exposant n") est définie par :
$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$

Cours en vidéo

Exemples

$A = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

$B = (-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$

$C = -4^2 = -4 \times 4 = -16$

Attention !

On observera bien la différence entre les exemples B et C, en respectant les priorités de calculs.
L'exposant est prioritaire sur le signe - dans le C.

II cas particuliers :

Cas où $n = 1$:

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^1 = a$

Exemple :

$A = 3^1 = 3$

Convention :

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, c'est à dire pour tout réel a non-nul, on a : $a^0 = 1$

Exemple :

$A = 8^0 = 1$

Attention !

0^0 n'existe pas !

1 Généralisation :

Découverte des exposants négatifs

On comprend assez facilement l'algorithme des puissances :

**en multipliant à chaque fois par le même nombre,
l'exposant augmente de 1 à chaque étape.**

$$3^1 \xrightarrow{\times 3} 3^2 \xrightarrow{\times 3} 3^3 \xrightarrow{\times 3} 3^4$$

Essayons de remonter cet algorithme "à contre courant", vers la gauche :

en divisant à chaque fois par le même nombre,
l'exposant baisse de 1 à chaque étape.

$$3^1 \xleftarrow{\div 3} 3^2 \xleftarrow{\div 3} 3^3 \xleftarrow{\div 3} 3^4$$

En poursuivant cet algorithme vers la gauche, on va définir naturellement les exposants négatifs :

en divisant à chaque fois par le même nombre,
l'exposant baisse de 1 à chaque étape.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dfrac{1}{9} & \xleftarrow{\div 3} & \dfrac{1}{3} & \xleftarrow{\div 3} & 1 & \xleftarrow{\div 3} & 3^1 & \xleftarrow{\div 3} & 3^2 \\
= \dfrac{1}{3^2} & & = \dfrac{1}{3^1} & & = 1 & & = 3 & & = 9 \\
= 3^{-2} & \xleftarrow[\text{exposant } -1]{} & = 3^{-1} & \xleftarrow[\text{exposant } -1]{} & = 3^0 & \xleftarrow[\text{exposant } -1]{} & = 3^1 & \xleftarrow[\text{exposant } -1]{} & = 3^2
\end{array}$$

Notations

On accepte donc d'écrire : $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$; $3^{-1} = \dfrac{1}{3^1}$

2 Définition :

Définition :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On convient que : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples :

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Attention !

Le signe "-" en exposant, est une notation comme visualisé dans l'activité, qui permet de généraliser la notation avec les exposants. Cela sera très utile et pratique dans les calculs (voir partir 4).
Mais Attention !!!!
Ce signe "-" est placé devant l'exposant mais pas devant le nombre dont on calcule la puissance. ce signe ne veut donc pas dire que le nombre est négatif, c'est seulement son exposant qui l'est.
$5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$ est un nombre positif.
A ne pas confondre avec $-5^3 = -5^3 = -125$

3 S'évaluer :

QCM à valider avec ses identifiants :

III Puissances de 10

1 Généralités :

Propriété :

On a en particulier avec $n \in \mathbb{N}^*$:

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \cdots \times 10}_{n \text{ fois}} = 1\ \underbrace{0...0}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,00 \cdots \times 0}_{n \text{ zéros}}1$$

Propriété :

Exemples :

$$10^2 = 100 \quad ; \quad 10^3 = 1000 \qquad \text{et} \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01 \quad ; \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

Bien pratique en physique !

Les puissances de 10 donnent de nombreuses situations d'utilisation de ces notations.

- En chimie :
  Le diamètre du noyau de l'atome d'hydrogène mesure $0,0000000000000024$ m.
  Il est clairement plus simple de l'écrire : $2,4 \times 10^{-15}$ m.

- En astronomie :
  on estime la masse du soleil assez proche de $2000000000000000000000000000000$ Kg.
  Il est plus facile de manipuler cette donnée ainsi : 2×10^{30} Kg.

Les physiciens...

Dans leurs notations, les physiciens ont pris l'habitude de remplacer le symbole $\times$ par un .
Ils écrivent souvent $2,4\ .\ 10^{-15}$ et $2\ .\ 10^{30}$.
No comment....

2 Les préfixes

Vocabulaire :

Pour adapter les unités des grandeurs que l'on mesure, aux puissances de 10, les physiciens, chimistes, biologistes, économistes, .., ont souvent recours aux préfixes :

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Mega			kilo	hecto	déca				milli			micro

10^{12}	téra	T
109	giga	G
10^6	méga	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10^1	déca	da
10^0		
10^{-1}	déci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Pour des tailles de fichiers par exemple :
On parlera d'un fichier de :

5ko pour dire 53000 octets $= 5 \times 10^3$ octets.

5Mo pour dire 5000000 octets $= 5 \times 10^6$ octets.

5Go pour dire 5000000000 octets $= 5 \times 10^{12}$ octets.

5To pour dire 5000000000000 octets $= 5 \times 10^{15}$ octets.

3 Les erreurs classiques à éviter :

- **Confondre multiplication et puissance :**
  $3^2 = 3 \times 3 = 9$ est différent de $3 \times 2 = 6$
  $3^2 \neq 3 \times 2$!
  Erreur classique de l'élève qui va trop vite et confond les opérations.
- **Erreur de signe :**
  La puissance agit uniquement sur le nombre juste devant l'exposant ou entre parenthèses.
  $-2^2 = -(2)^2 = -(2 \times 2) = -4$ est différent de $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$
  Attention à cette erreur de signe très fréquente !
- **Erreur de priorité :**
  La puissance est toujours prioritaire sur les 4 autres opérations de base.
  $2 \times 4^2 = 2 \times (4)^2 = 2 \times 16 = 32$
  $(2 \times 4)^2 = 8^2 = 64$ $5 + 3^2 = 5 + (3)^2 = 5 + 9 = 14$
  $(5 + 3)^2 = 8^2 = 64$.
  Donc : $2 \times 4^2 \neq (2 \times 4)^2$ et $5 + 3^2 \neq (5 + 3)^{2!}$
  Erreurs de priorité à bien surveiller !

4 S'évaluer :

QCM à valider avec ses identifiants :

IV Propriétés calculatoires :

1 Produit et quotient d'un même réel avec des exposants différentes.

Activité :

Avec les définitions du cours, on a :

$$4^3 \times 4^7 = \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{4^3} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{4^7} = 4^{7+3} = 4^{10}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a :

$$a^3 \times a^7 = \underbrace{a \times a \times a}_{a^3} \times \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}_{a^7} = a^{7+3} = a^{10}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 3 par n :

$$a^n \times a^7 = \underbrace{a \times a \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}_{a^7} = a^{n+7}$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 7 par m :

$$a^n \times a^m = \underbrace{a \times a \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \ldots \times a}_{m \text{ fois}} = a^{n+m}$$

On peut faire la même activité avec un quotient.

Activité :

Avec les définitions du cours, on a :

$$\frac{4^3}{4^7} = \frac{\overbrace{4 \times 4 \times 4}^{4^3}}{\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{4^7}} = \frac{1}{4 \times 4 \times 4 \times 4} = 4^{-4} = 4^{3-7}$$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Cours en vidéo

2 Puissances de puissances :

Activité :

Avec les définitions du cours, on a :

$$\left(4^3\right)^2 = 4^3 \times 4^3 = 4^{3+3} = 4^6 = 4^{3\times 2}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a :

$$\left(a^3\right)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^6 = a^{3\times 2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $m \in \mathbb{N}$,

on peut faire le même calcul en remplaçant 3 par n et 2 par m :

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \times \ldots \times a^n}_{m \text{ fois}} = a^{\overbrace{n + \ldots + n}^{m \text{ fois}}} = a^{n\times m}$$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

3 Même puissance de deux réels distincts :

Activité :

Avec les définitions du cours, on a :

$$5^3 \times 2^3 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{5^3} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{2^3} = (5 \times 2) \times (5 \times 2) \times (5 \times 2) = (5 \times 2)^3 = 10^3$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on peut faire le même calcul en remplaçant 4 par a, 2 par b et 3 par n :

$$a^n \times b^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{b \times \ldots \times b}_{n \text{ fois}} = \underbrace{(a \times b) \ldots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} = (ab)^n$$

Activité :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{N}$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

4 Les erreurs classiques à éviter :

- **Confondre les priorités :**
  $10^2 + 10^3 \neq 10^5$
  Il n'y a pas de propriétés avec les sommes de puissances !
  $10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100$ alors que $10^5 = 100000$
  Outre l'erreur de calcul, l'ordre de grandeur des deux résultats est sensiblement différent.
  Mettez donc du sens à vos calculs avant d' appliquer des propriétés dans des contextes où elles ne fonctionnent pas. Comme appliquer le théorème de Pythagore dans un triangle équilatéral.
- **Mal appliquer les propriétés :**
  $3^2 \times 4^3 \neq 12^5$
  $3^2 \times 4^3 = 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4 = 576$ et $12^5 = 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 = 248832$
  Comme dans le cas précédent, le calcul de droite est bien supérieur à celui de gauche. Imaginez que vous parliez en euros, l'ordre de grandeur est très différent !!
  Pour appliquer les formules avec les puissances, il faut outre une multiplication, qu'un élément soit commun aux deux facteurs :
  $3^2 \times 3^4 = 3^6$ Le nombre est le même, l'exposant change.
  $3^2 \times 4^2 \neq 12^6$ L'exposant est le même, le nombre change.

5 Applications :

Calculer le plus simplement, sans utiliser la calculatrice :

$A = 2^3 \times 2^4 =$	$B = 10^3 \times 10^{-4} =$	$C = x^2 \times x^3 =$	$D = \left(2^3\right)^4 =$	Correction en vidéo
$E = \left(10^3\right)^{-4}$	$F = \left(x^2\right)^3$	$H = \dfrac{10^3}{10^{-2}}$	$I = \dfrac{x^3}{x^1}$	Correction en vidéo

$J = (5 \times 3)^2$ $K = 5^5 \times 2^5$ $L = (3x)^2$ $M = (-2x)^3$

Correction en vidéo

6 S'évaluer :

QCM à valider avec ses identifiants :

V Notation scientifique :

1 Quelle écriture utiliser ?

Activité :

S'il est pratique d'écrire des nombres avec les puissances de 10, il se pose un problème d'homogénéité de ces écriture :
Le nombre 321000 peut se noter par exemple :

$321000 = 3210 \times 10^2 = 321 \times 10^3 = 32,1 \times 10^4 = 3,21 \times 10^5 = 0,321 \times 10^6$
On peut représenter la situation dans ce tableau de numération exprimé en puissances de 10 :

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
	3	2	1	0	0	0					

De même, le nombre $0,00345$ peut s'écrire :
$0,00345 = 345 \times 10^{-5} = 34,5 \times 10^{-4} = 3,45 \times 10^{-3} = 0,345 \times 10^{-2} = 345 \times 10^{-5}$.

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
						0,	0	0	3	4	5

2 Définitions

Définition pratique :

Pour s'accorder, et que chacun utilise la même écriture d'un même nombre, il a été décidé de définir une **notation scientifique**.
On choisit dans le tableau, la colonne du premier chiffre significatif et on l'écrit avec la puissance de 10 correspondante.

Illustration :

On écrira alors : $321000 = 3,21 \times 10^5$

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
	3,	2	1	0	0	0					

et $0,00345 = 3,45 \times 10^{-3}$

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
						0	0	0	3,	4	5

Définition mathématique :

Écrire un nombre en écriture scientifique c'est l'exprimer sous la forme

$$a \times 10^n \qquad \text{avec} 1 \leq a < 10 \text{et} n \in \quad N$$

Cours en vidéo

exemples :

$123 \times 10^4 = 1,23 \times 10^6$ et $45 \times 10^{-4} = 4,5 \times 10^{-3}$

Le plus simple étant de s'aider du tableau, au moins dans sa tête :

10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
1	2	3	0	0	0	0					
						0,	0	0	4	5	

Exemples :

Écrire en notation scientifique les nombre suivants :

$A = 9,5 \quad B = 50,7 \quad C = 1000 \qquad D = 1234 \qquad E = -25,1 \quad F = \dfrac{5}{2}$

$G = 0,5 \quad H = 0,02 \quad I = 0,0123 \quad J = 0,00015 \quad K = -0,7 \quad L = \dfrac{1}{4}$

3 S'évaluer, se préparer à l'évaluation :

QCM à valider avec ses identifiants.

Exercices Mathaléa (1ère partie)

Exercices Mathaléa (2ème partie)