Proportions

Objectifs

- Calculer une proportion ou un effectif.
- Union et Intersection de populations
- Calculer la proportion d'une proportion.

I Population et sous population

1 Définitions :

Définition

On appelle **population**, un ensemble dobjets ou dindividus faisant lobjet dune étude.

Définition

On appelle **sous-population** dune population une partie de cette population.

Définition

On appelle **individus** d'une population, les éléments qui constituent cette population. Le nombre dindividus sappelle l**effectif** de la population.

2 Exemples :

Pour calculer la proportion ou le taux de chômage dans un pays :

- La **population de référence** est la *population active*, cest-à-dire lensemble de toutes les personnes en âge de travailler en général, de 18 à 64 ans qui sont disponibles sur le marché du travail, quils aient un emploi ou non.
- Lensemble des chômeurs forment une **sous-population** de la population de référence, c'est à dire la *population active* dun pays.
- Les chômeurs sont des **individus** ce ces populations.

QCM 1

Note :

3 Proportion d'une sous-population

Définition

La proportion p d' une sous-population dans une population totale est le rapport des effectifs :

$$p = \frac{\text{effectif de la sous population}}{\text{effectif de la population de référence}}$$

Vidéo de cours

Autre formulation :

La proportion p d' une sous-population d'effectif n, dans une population totale, d'effectif N est le rapport des effectifs :

$$p = \frac{n}{N}$$

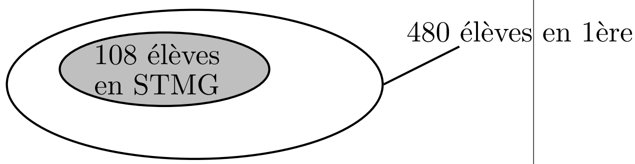
II Calculer la proportion d'une sous population

Exercice 1

Sur les 480 élèves inscrits en classe de 1$^{\text{re}}$, 108 d'entre eux ont choisi la filière STMG.
Quelle est la proportion d'élèves de STMG en 1ère ?

Correction :

1. On représente la situation avec un diagramme de Wenn :



2. On recherche les données connues dans l'énoncé :
   La population totale des élèves de 1ère, notée N, est égale à 480 . C'est la population de référence.
   La sous-population des élèves de STMG, notée n, est égale à 108.
3. On applique le cours : $p = \dfrac{n}{N} = \dfrac{108}{480} = \dfrac{9}{40} = 0,225$
4. On conclut :
   La proportion d'élèves de STMG parmi tous les élèves de première, est $p = 0,225$.

Remarque

Une proportion peut s'exprimer de différente manière.
Dans l'exemple précédent :
Sous forme fractionnaire : $p = \dfrac{9}{40}$ Sous forme décimale : $p = 0,225$ En pourcentage : $p = 22,5\%$
Selon les consignes, situations, on optera pour l'une ou l'autre.

TRAVAILLER EN AUTONOMIE :

Exercice 2

Lan passé, parmi les 32 élèves de terminale STMG, 17 ont obtenu une place en BTS ou en IUT.
Calculer la valeur approchée, arrondie au centième, de la proportion d'élèves de cette classe qui ont obtenu une place en BTS ou en IUT.

Mathaléa

Exercice 3

Lors d'un tournoi de basket, Gaspard a marqué 12 paniers sur 20 lancers tandis que Rose en a marqué 15 sur 24.
Quel est celui qui a le meilleur pourcentage de réussite ?

Correction//Vidéo

QCM 2

Note :

III Calculer l'effectif d'une sous-population

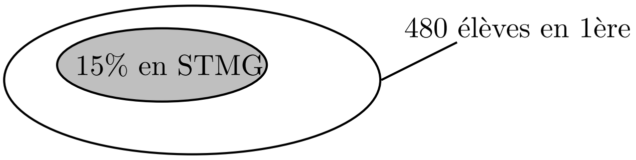
Exercice 4

Sachant que parmi les 480 élèves de 1ère, 15% ont choisi la filière $STMG$, calculer le nombre d'élèves dans cette filière.

Vidéo de cours

Correction :

1. On représente la situation avec un diagramme de Wenn :



2. On recherche les données connues dans l'énoncéă:
   L'effectif N, de la population de référence (les élèves de 1ère), vaut : $N = 480$.
   On cherche l'effectif de la sous-population des élèves de STMG, notée n.
   La proportion d'élèves de $STMG$, notée p, est égale à 15% ou $0,15$
3. On applique le cours :
   $p = \dfrac{n}{N}$ donc $0,15 = \dfrac{n}{480}$
   d' où avec un produit en croix : $n = 0,15 \times 480 = 72$
4. On conclut : Il y a 72 élèves en lère STMG.

IV Calculer l'effectif d'une population totale

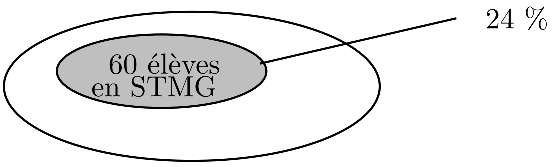
Exercice 5

Dans un lycée, 60 élèves sont en 1^{ire} $STMG$, ce qui représente 24% des effectifs des élèves de 1ère de l'établissement.
Calculer le nombre d'élèves en première.

Cours en vidéo

Correction :

1. On représente la situation avec un diagramme de Wenn :



2. On recherche les données connues dans l'énoncé :
   On cherche l'effectif de la population totale des élèves de 1ère, notée N,
   On connaît l'effectif de la sous-population des élèves de $STMG, n = 60$.
   On connaît la proportion d'élèves de $STMG$, notée p, est égale à 24% ou $0,24$.
3. On applique le cours :
   $p = \dfrac{n}{N}$ donc $0,24 = \dfrac{60}{N}$ d' où, avec un produit en croix : $N = \dfrac{60}{0,24} = 250$
4. On conclut : Il y a 250 élèves au total en lère.

TRAVAILLER EN AUTONOMIE :

Exercice 6

Dans une association, environ 29% des adhérents ont plus de de 23 ans.
Sachant qu'ils représentent 67 personnes, combien de personnes sont adhérentes à l'association ?

Mathaléa

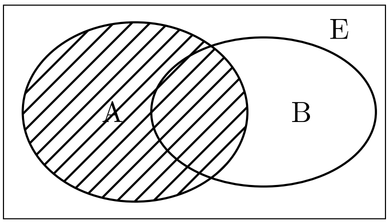
QCM 3

Note :

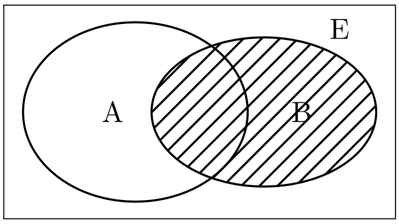
V Union et Intersection

1 Définitions

Étant donnés deux ensembles A et B,



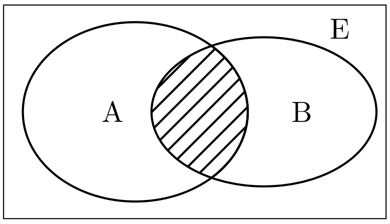
A



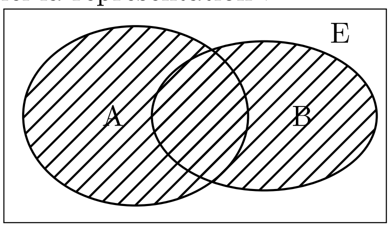
B

cours en vidéo

on a formé de nouveaux ensembles notés $A \cap B$ et $A \cup B$, dont voici la représentation :



$A \cap B$



$A \cup B$

Définition :

- $A \cap B$ désigne l'ensemble des éléments appartenant à A **ET** B ; $A \cap B$ se lit « A inter B ».
- $A \cup B$ désigne l'ensemble des éléments appartenant à A **OU** B ; $A \cup B$ se lit « A union B ».

Une autre façon de le dire :

Définition :

- Un élément appartient à $A \cap B$ si c'est un élément commun à A **et** à B.
- Un élément appartient à $A \cup B$ s'il appartient **au moins à une des deux parties**.

2 Propriété :

Propriété :

Soit A et B deux sous populations d'une même population E, d'effectif n et de proportion p :
On a alors l'égalité (que l'on retrouve en probabilités) :

$$n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B} \quad \text{(égalité avec les effectifs)}$$
$$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B} \quad \text{(égalité avec les proportions)}$$

Exercice 7

Dans une classe de 35 élèves, 14 élèves étudient langlais, 12 élèves étudient lespagnol et 5 élèves étudient les deux.
Quelle est la proportion d'élèves apprenant l'anglais ou l'espagnol ?

Correction :

1. On recherche les données connues dans l'énoncé :
   On connaît l'effectif de :
   - la population totale, $N = 35$.
   - la sous-population des élèves qui étudient l'anglais $n_A = 14$ donc $p_A = \dfrac{14}{35}$
   - la sous-population des élèves qui étudient l'espagnol $n_E = 12$ donc $p_E = \dfrac{12}{35}$
   - la sous-population des élèves qui étudient l'espagnol et l'anglais $n_{A\cap E} = 5$ donc $p_{A\cap E} = \dfrac{5}{35}$
2. On applique le cours :
   $$p_{A\cup E} = p_A + p_E - p_{A\cap E} \text{ donc}$$
   $$p_{A\cup E} = \frac{14}{35} + \frac{12}{35} - \frac{5}{35} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0,60$$
3. On conclut : 60% des élèves de cette classe apprennent l'anglais ou l'espagnol.

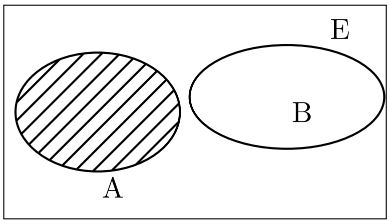
QCM 4

Note :

3 Ensembles disjoints :

Définition :

Soit A et B deux sous-population d'une population E.
Si $A \cap B = \emptyset$, alorsăon dit que les deux sous-populations A et B sont disjointes.
Les sous-populations A et B n'ont aucun élément en commun.



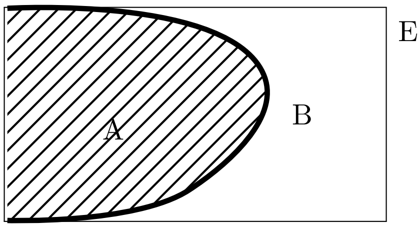
Exemple :

On appelle A la sous-population des élèves de 1ère STMG et B la sous-population des élèves de 1ère générale.
Aucun élève ne peut être en même temps dans A et dans B. Les sous-populations A et B sont disjointes.

Propriétéă:

Si A et B sont deux sous-populations disjointes d'une population E,
alorsăon a $p_{A\cup B} = p_A + p_B$ et $n_{A\cup B} = n_A + n_B$

4 Partition d'un ensembleă:



Définitionă:

Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$ alors
on dit que les deux ensembles A et B forment une **partition** de E.

Propriété

Les sous-populations A et B n'ont aucun élément en commun.
Les sous-populations A et B couvrent la population totale.

Exempleă:

On appelle E la population des élèves d'une classe de 1ère STMG.
On appelle A la sous-population des élèves de 1ère STMG qui ont leur BSR et B la sous-population des élèves de 1ère STMG qui ne l'ont pas.
Aucun élève ne peut être en même temps dans A et dans B. Chaque élève est soit dans A soit dans B, aucun élève n'appartient ni à A, ni à E.
A et B forment donc bien une **partition** de E.

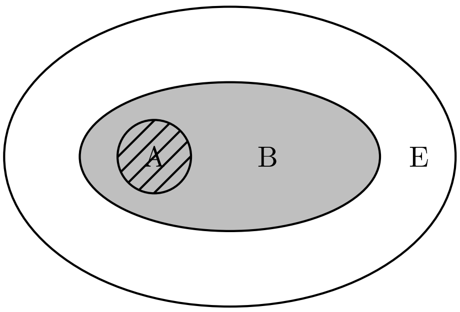
Propriété

Si A et B sont deux sous-populations formant une partition d'une population E d'effectif N.
On a alorsă: $p_A + p_B = 1$ et $N = n_A + n_B$.

5 Inclusion

Définition :

On considère une population E, une sous-population B qui contient une autre sous-population A.
Tous les éléments de A appartiennent à B.
On dit que A est inclus dans B que l'on note $A \subset B$



Propriété

On considère 3 populations A, B et E où A est une sous-population de B et B une sous-population de E.

Si p est la proportion de A dans B et p' celle de B dans E, alors la proportion P de A dans E est :

$$P = p \times p'$$

Démonstration

$$p \times p' = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } B} \times \frac{\text{nombre d'éléments de } B}{\text{nombre d'éléments de } E} = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = P.$$

QCM 5

Note :

EXERCICE CORRIGÉ :

Exercice 8

Dans une ville comprenant 120 000 logements, on note que 30% d'entre eux sont des maisons individuelles. Parmi ces maisons, la proportion répondant aux nouvelles normes d'isolation thermique n'est que de 20%. Combien y a-t-il dans cette ville de maisons individuelles répondant aux nouvelles normes d'isolation thermique ?

Correction :
La population étudiée est celle des habitations de la ville considérée. Soit E cette population.
La première sous-population est celle des maisons individuelles, appelée B. Soit p' la proportion de B dans E.
La deuxième sous-population est celle des maisons individuelles répondant aux nouvelles normes d'isolation thermique, appelée B . Soit p la proportion de A dans B.
D'après l'énoncé, on a : $p = 20\%$; $p' = 30\%$ et $A \subset B \subset E$
D'après la propriété de cours, la proportion de maisons individuelles répondant aux nouvelles normes d'isolation thermique par rapport à l'ensemble des logements est $p = p \times p' = 0,2 \times 0,3 = 0,06 = 6\%$
On calcule maintenant 6% de 120000 :
Donc le nombre de telles maisons est $p \times 120000 = 0,06 \times 120000 = 7200$.
Il y a 7200 maisons répondant aux nouvelles normes d'isolation thermique dans cette ville.

TRAVAILLER EN AUTONOMIE :

Exercice 9

Dans un club, 25% des adhérents ont moins de 18 ans dont 20% ont moins de 15 ans. Quelle est la proportion des moins de 15 ans dans ce club ?

Corrigé en vidéo

Exercice 10

Dans une lycée, 37% des lycéens sont en classe de 1ère. Parmi eux, 49% sont en filière technologique.
Quel est le pourcentage d'élèves en 1ère technologique de ce lycée ?

Mathalea

VI Tableaux croisés

1 Définition

Une autre façon de présenter des sous-populations qui se recoupent au sein d'une population est de proposer un **tableau croisé**. Par exemple, on s'intéresse aux admis au diplôme national du Brevet en série générale qu'on étudie en fonction du sexe du candidat.
On peut alors les représenter à l'aide d'un tableau croisé :

	A (Admis)	**R** (Recalés)	Total
Garçons	317779	47905	365684
Filles	346187	27262	373449
Total	663966	75167	739133

On peut lire ainsi que 346187 filles ont ainsi obtenu le DNB en série générale.
Les deux colonne et ligne nommées ńTotalż sont appelées les **marges** du tableau.

2 Fréquences marginales

On divise chaque case du tableau par l'effectif total :
On obtient ainsi les proportions par rapport à la population totale des admis.
On peut aussi parler de **fréquences marginales**.

Pourquoi ce nom ?

Fréquences qui est le terme statistique qui mesure une proportion,
marginale car on divise par l'effectif total, qui est à la marge du tableau.

	A (Admis)	**R** (Recalés)	Total
G (Garçons)	$0,4299$	$0,0648$	$0,4947$
F (Filles)	$0,4684$	$0,0369$	$0,5053$
Total	$0,8983$	$0,1017$	1

La proportion des élèves qui sont des garçons et qui ont eu le DNB est $0,4299$ ou $42,99\%$.
On note $f(G\cap A)$ cette fréquence.

Remarque

La somme des valeurs contenues dans les marges est égale à 1 (ou 100%) (attention lorsqu'il y a des arrondis à faire).

3 Fréquences conditionnelles :

Dans cette partie, on ne travaille plus avec la population totale de tous les inscrits.

Exemple : A condition de connaître le sexe du candidat

On peut choisir d'étudier les résultats uniquement chez les garçons ou uniquement chez les filles.
La population de référence est celle des garçons ou bien celle des filles. On divise alors l'effectif des admis ou de recalés par l'effectif des garçons ou des filles.
Ce qui donne ce tableau :

	Admis	Recalés	Total
Garçons	$\dfrac{317779}{365684}\approx 0,8690$	$\dfrac{47905}{365684}\approx 0,1310$	1
Filles	$\dfrac{346187}{373449}\approx 0,9270$	$\dfrac{27262}{373449}\approx 0,0730$	1

On peut déduire de ce tableau des phrases :

- **Sachant que** c'est un garçon, un élève a $86,90\%$ de chance d'avoir le DNB.
  On parle de fréquence conditionnelle (à **condition** que ce soit un garçon, ...)
- **Sachant que** c'est une fille, un élève a $92,70\%$ de chance d'avoir le DNB.
  On parle de fréquence conditionnelle (à **condition** que ce soit une fille, ...)

EXEMPLE : A CONDITION DE CONNAÎTRE LA RÉUSSITE OU NON DU CANDIDAT

On peut choisir d'étudier la proportions de garçons ou de filles chez les recalés, ou chez les admis.
Si la population de référence est celle des admis. On divise alors l'effectif des garçons admis ou filles admis par l'effectif total des admis.
On peut procéder de la même manière avec les recalés.

	Admis	Recalés
Garçons	$\frac{317779}{663966} \approx 0,4786$	$\frac{47905}{75167} \approx 0,6373$
Filles	$\frac{346187}{663966} \approx 0,5214$	$\frac{27262}{75167} \approx 0,3627$
Total	1	1

On peut déduire de ce tableau des phrases :

- **Parmi** les admis, il y a $47,86\%$ de garçons, et $52,14\%$ de filles.
  On parle de fréquence conditionnelle (On travaille **parmi** les admis).
- **Parmi** les recalés, il y a $63,73\%$ de garçons, et $36,27\%$ de filles.
  On parle de fréquence conditionnelle (On travaille **parmi** les recalés).

QCM 6

Note :