Les Équations du second degré

I Introduction :

1 Les équations produit-nul :

Propriété

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$(3x-2)(2-5x)=0$
Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.
$3x-2=0$ ou bien $2-5x=0$

$x=\dfrac{2}{3}$ ou bien $x=\dfrac{2}{5}$
$S=\left\{\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{5}\right\}$

Génial !

Avec cette propriété des équations produit-nul,
on arrive à résoudre des équations du second degré sous forme factorisées.

2 Oui, mais quand on n'a pas une forme factorisée....

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$(4-3x)^2-(4-3x)(6x+7)=0$

Attention !!

On observe qu'on n'a pas de produit.
On ne peut pas appliquer la propriété du produit-nul !!

Stratégie :

Il faut factoriser cette expression pour se ramener à un produit nul.

$$\begin{aligned}(4-3x)^2-(4-3x)(6x+7)&=0\\(4-3x)\big((4-3x)-(6x+7)\big)&=0\\(4-3x)\big(4-3x-6x-7)\big)&=0\\(4-3x)\big(-3-9x)\big)&=0\end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$4-3x=0$ $\qquad$ $-3-9x$

$x=\dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $x=\dfrac{1}{3}$

$$S=\left\{\ \dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\ \right\}$$

Autre exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $9x^2+12x+4=0$
Il n'y a pas de facteur commun mais on reconnaît le développement d'une identité remarquable :
$9x^2+12x+4=(3x+2))^2$
On en déduit que résoudre $9x^2+12x+4=0$ est équivalent à résoudre $(3x+2))^2=0$
C'est une équation produit-nul avec une seule solution : $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$

3 Oui, mais quand on n'arrive pas à factoriser....

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2+6x+5=0 \quad (1)$
On ne peut pas trouver de réels a et b, tels que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=x^2+6x+5$.
On est coincés !!

Astuce du père Guyon

Ne considérons pas le $+5$ de l'équation, et essayons de trouver une identité remarquable qui commence son développement par :
x^2+6x.

$$(x+3)^2 = x^2+6x+9$$
$$x^2+6x=(x+3)^2-9$$

En changeant x^2+6x par $(x+3)^2-9$, on obtient :

$$\begin{aligned}(1) \iff (x+3)^2-9+5&=0\\ (x+3)^2-4&=0\\ (x+3)^2-2^2&=0\\ (x+3-2)(x+3+2)&=0\\ (x+1)(x+5)&=0\\ S=\{-5;-1\}\end{aligned}$$

QCM 1

note :

II forme canonique

1 Principe

Forme canonique, Kesako ?

Pour résoudre une équation de degré 2, quand on ne trouve ni facteur commun, ni identité remarquable, il faut chercher à faire apparaître le début d'une identité remarquable avec les termes en x^2 et en x.

EXEMPLE 1

Résoudre $\underline{x^2 - 8x} + 2 = 0$
On reconnaît que $(x+4)^2 = \underline{x^2 + 8x} + 16$
On en déduit que $\underline{x^2 + 8x} = (x+4)^2 - 16$

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 2 &= 0 \\ (x+4)^2 - 16 + 2 &= 0 \\ (x+4)^2 - 14 &= 0 \end{aligned}$$

On a transformé la forme développée du polynôme en une autre forme, que l'in appelle **forme canonique**.
Elle permet de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} (x+4)^2 - \sqrt{14}^2 &= 0 \\ (x+4-\sqrt{14})(x+4+\sqrt{14}) &= 0 \\ S &= \left\{-4+\sqrt{14}; -4-\sqrt{14}\right\} \end{aligned}$$

EXEMPLE 2

Résoudre $3x^2 - 8x + 2 = 0$

Aie ! c'est plus compliqué

Ici, le coefficient de x^2 n'est pas égal à 1....
Pas de problème, on va factoriser par 3.

$3x^2 - 8x + 2 = 3\left(\underline{x^2 - \frac{8}{3}x} + \frac{2}{3}\right)$

On reconnaît que $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = \underline{x^2 - \frac{8}{3}x} + \left(\frac{4}{3}\right)^2$

On en déduit que $\underline{x^2 - \frac{8}{3}x} = \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 8x + 2 = 0 \\ \iff & 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}\right) = 0 && \textit{On factorise par 3} \\ \iff & 3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\right) = 0 && \textit{On fait apparaître une Identité remarquable} \\ \iff & 3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + \frac{2}{3}\right) = 0 && \textit{On réduit les termes constants.} \\ \iff & 3\left(\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{10}{9}\right) = 0 && \textit{On obtient } \textbf{\textit{la forme canonique}}. \iff \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{10}{9} = 0 \quad \textit{On peut si} \\ \iff & \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 = 0 && \textit{On fait apparaître} a^2 - b^2. \end{aligned}$$

$$\iff \left(x - \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}\right) = 0 \qquad \textit{On factorise.}$$

$$\iff \left(x - \frac{4+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x - \frac{4-\sqrt{10}}{3}\right) = 0 \qquad \textit{On résout l'équation produit-nul.}$$

$$S = \left\{\frac{4-\sqrt{10}}{3}; \frac{4+\sqrt{10}}{3}\right\}$$

Génial !!

En écrivant le polynôme sous forme canonique,
on a réussi à factoriser son expression et à résoudre l'équation.

2 Définition :

Forme canonique

Soit P un polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Ecrire P sous forme canonique, c'est trouver des réels α et β tels que :

$$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Exercice 1

Soit P, défini pour tout $x \in R$, par : $P(x) = 3x^2 - 24x + 47$.
Montrer que la forme canonique de P est sous la forme $P(x) = 3(x-4)^2 - 1$.

Correction :

Méthode

Le plus simple ici est de développer la forme proposée, sans préjuger qu'elle soit déjà égale à $P(x)$, pour prouver qu'elle est égale, pour tout $x \in R$ à $3x^2 - 24x + 47$.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3(x-4)^2 - 1 &= 3(x^2 - 8x + 16) - 1 \\ &= 3x^2 - 24x + 48 - 1 \\ &= 3x^2 - 24x + 47 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

On a bien montré que, pour tout $x \in R$, on a : $P(x) = 3(x-4)^2 - 1$.

QCM 2

note :

3 Mettre un polynôme sous forme canonique :

Méthode :

Soit l'expression $ax^2 + bx + c$, avec a, b, c des réels, dont a est non-nul.
Pour déterminer la forme canonique de $ax^2 + bx + c$:

1. Factoriser l'expression par le coefficient a.
2. Faire apparaître le début de l'identité remarquable $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
3. Réduire les termes constants.

Exercice 2

Mettre sous forme canonique le polynôme P,
qui s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$P(x) = 3x^2 - 24x + 45$

Correction en vidéo

4 Propriété :

Détermination des coefficients de la forme canonique :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
En posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$,
on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Démonstration : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$.
Or pour tout réel x, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$. On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Exercices corrigés
avec Mathalea

Soit en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$,
on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

QCM 3

note :

III Résolution des équations du second degré

1 Avec la forme canonique :

Exercice 3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 2x - 5 = 0$ en utilisant la forme canonique du polynôme.

Correction :
On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (1)$.
On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,
On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici 4.
$(1) \iff \quad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} = 0$
On reconnaît le début d'une identité remarquable :
$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$
On en déduit que : $x^2 - \frac{1}{2}x = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$
Il vient alors :

$$\begin{aligned} & x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} = 0 \\ \iff \quad & \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{5}{4} = 0 \\ \iff \quad & \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{21}{16} = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:
avec $a = \left(x - \frac{1}{4}\right)$ et $b = \sqrt{\frac{21}{16}} = \sqrt{\frac{21}{4^2}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$
L'équation à résoudre est équivalente à :

$$\left(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{21}}{4}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{21}}{4}\right) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :
Soit $x - \frac{1+\sqrt{21}}{4} = 0$, soit $x - \frac{1-\sqrt{21}}{4} = 0$
Soit $x = \frac{1+\sqrt{21}}{4}$, soit $x = \frac{1-\sqrt{21}}{4}$
$S = \left\{\frac{1-\sqrt{21}}{4}; \frac{1+\sqrt{21}}{4}\right\}$

Autres exercices
sur Mathalea

2 Généralisation de la méthode :

Toujours pareil !!

La méthode vue précédemment est importante à maîtriser, mais elle est répétitive. Pour gagner du temps, on va procéder à une généralisation, qui va nous donner des formules, qui permettront d'effectuer plus rapidement cette procédure, et donc de gagner du temps.
Attention, n'oubliez jamais que derrière les formules qui arrivent, se cache la méthode de résolution avec la forme canonique.

Vidéo de cours

Procédons de la même manière, avec un polynôme quelconque :

Une équation du second degré à une inconnue x,
est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

où $a,\ b,\ c$ sont des réels et $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
& ax^2+bx+c=0 \quad (1) \\
\iff & a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 && \text{en utilisant la forme canonique démontrée plus haut.} \\
\iff & a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 && \text{en posant}\Delta=b^2-4ac \\
\iff & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 && \text{en divisant par } a\neq 0
\end{aligned}$$

- Si $\Delta<0$:
  alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$ et donc $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. Au final : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$.
  Donc l'équation du second degré n'a pas de solution.
- Si $\Delta=0$:
  alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ équivaut à l'équation $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$.
  Donc l'équation du second degré a pour unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$:

$$\begin{aligned}
& \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \\
\iff & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0 \\
\iff & \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \\
\iff & \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0
\end{aligned}$$

  Donc l'équation du second degré a deux solutions $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

3 Propriété

Les formules de cours à connaître :

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$
où a, b et c sont des réels fixés avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution ; $S=\emptyset$.
- Si $\Delta=0$ alors l'équation a une seule solution ; $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions ; $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

QCM 4

note :

4 EXEMPLES

Exercice 4
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2+3x-4=0$:

Correction :

Correction en vidéo

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x^2+x+1=0$:

Correction :

Correction en vidéo

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2-3=7x$:

Correction :

Correction en vidéo

S'entraîner avec mathalea

IV SOMME ET PRODUIT DE RACINES

Propriété

Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors :
$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

:

Autre formulation plus pratique !!

Si l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors :
$S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$

Cours
en vidéo

Démonstration :
Soit S et P la somme et produit de deux réels x_1 et x_2.
On veut résumer ces informations par ce système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{lll} S & = & x_1 + x_2 \\ P & = & x_1 \times x_2 \end{array}\right.$$

En résolvant par substitution, a un système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & S - x_2 \\ P & = & (S - x_2) \times x_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & S - x_2 \\ P & = & Sx_2 - x_2^2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & x_2 - S \\ 0 & = & Sx_2 - x_2^2 - P \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & x_2 - S \\ x_2^2 & - & Sx_2 + P = 0 \end{array}\right.$$

Le nombre x_2 est donc solution de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0$$

On pourrait procéder de même avec x_1 et prouver que le nombre x_1 est aussi solution de cette équation.
On a donc prouvé que les solutions de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

sont

$$S = \{x_1 ; x_2\}$$

APPLICATION

Exercice 7
Existe-t-il deux nombres réels dont la somme vaut 4 et le produit 13 ?

Correction :

Correction
en vidéo

V CHANGEMENT DE VARIABLE

Exercice 8
Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $-2x^2 + 9x - 4 = 0$.

Exercice 9
Déduire de l'exercice précédent la résolution de $-2x^4 + 9x^2 - 4 = 0$

Méthode

On va poser $X = x^2$ et opérer un changement de variable, pour résoudre une équation en X.
Une fois les solutions en X trouvées, on reviendra à x pour retrouver les solutions de l'équation initiale.

Correction en vidéo

Exercice 10

Déduire de l'exercice précédent la résolution de $-2x + 9\sqrt{x} - 4 = 0$

Méthode

Utilisez un nouveau changement de variable pour résoudre cette équation. Attention de bien vérifier le domaine d'existence de la nouvelle variable.

Correction en vidéo

Exercice 11

Déduire de l'exercice précédent la résolution de $-\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{9}{x} - 4 = 0$

Méthode

Utilisez un nouveau changement de variable pour résoudre cette équation. Attention de bien vérifier le domaine d'existence de la nouvelle variable.

Correction en vidéo

VI Signe du trinôme

1 Factorisation :

Propriété :

Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$:

- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$ en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$ en notant x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.

Vidéo de cours

Démonstration :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.
On peut écrire f sous forme canonique, en revenant à la définition de cours :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

- Si $\Delta < 0$:
  $f(x)$ est alors le produit par a d'une somme de deux nombres positifs.
  En conséquence, le trinôme ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
  Soit en notant $x_0 = -\frac{b}{2a}$ l'unique racine on a :$f(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta > 0$:
  alors $f(x) = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.
  Soit en notant $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les deux racines, on a : $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

2 Exemples

Exercice 12
Factoriser l'expression $4x^2 - 3x - 1$:

Correction en vidéo

Exercice 13
Factoriser l'expression $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$:

Correction en vidéo

S'entraîner avec mathalea

QCM 5

note :

3 Signe d'un trinôme du second degré :

Propriété :

Soit f un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \in]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$ et $f(x)$ est du signe contraire de celui de a pour tout réel $x \in]x_1; x_2[$.

Vidéo de cours

Démonstration :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs donc le signe du trinôme est le signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ donc $f(x)$ est nul pour $x = -\dfrac{b}{2a}$; pour les autres valeurs de x le signe du trinôme est le signe de a.
- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$. Étudions le signe du produit $a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

A connaître par cur !

On retiendra la règle :
« Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines.

Exercice 14

Résoudre l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$

Correction en vidéo

Exercices mathalea :