

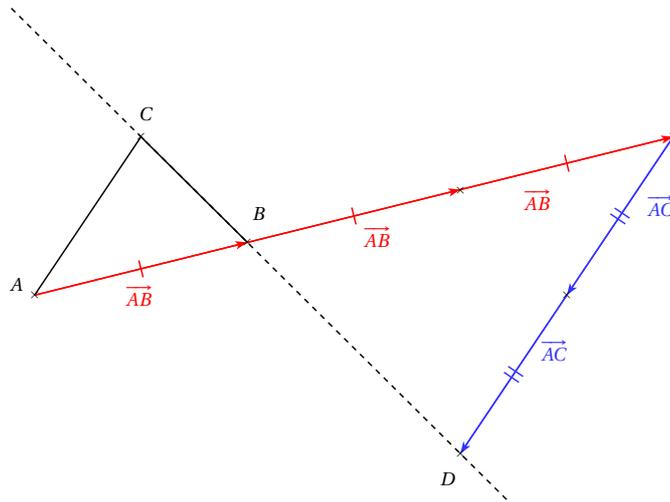
MATHEMATIQUES

Quelques exercices sur les vecteurs

Exercice 1

- Partie A -

1.



2.

$$\begin{aligned}\vec{BC} &= \vec{BA} + \vec{AC} \\ &= -\vec{AB} + \vec{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \vec{BA} + \vec{AD} \\ &= -\vec{AB} + 3\vec{AB} - 2\vec{AC} \\ &= 2\vec{AB} - 2\vec{AC}\end{aligned}$$

En fonction de ...

Exprimer les vecteurs \vec{BC} et \vec{BD} en fonction des seuls vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} signifie que l'on veut des égalités du type :

$$\vec{BC} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \text{ et } \vec{BD} = x'\vec{AB} + y'\vec{AC}$$

3. On remarque que $\vec{BD} = -2\vec{BC}$.
Les vecteurs \vec{BC} et \vec{BD} sont colinéaires.
Donc les points B, C et D sont alignés.

Ben oui...

$$\text{On a } \vec{BD} = 2\vec{AB} - 2\vec{AC} = -2(-\vec{AB} + \vec{AC}) = -2(\underbrace{\vec{BA} + \vec{AC}}_{=\vec{BC}})$$

- Partie B -

La figure est la précédente.

1. Coordonnées des points dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$:
 $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$ et $D(3; -2)$.

2. On a $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$(-1) \times (-2) - 1 \times 2 = 2 - 2 = 0$. Les vecteurs \vec{BC} et \vec{BD} sont colinéaires, donc les points B, C et D sont alignés.

N'oubliez pas !

Le point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ lorsque x et y vérifient $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$. On obtient ainsi directement les coordonnées du point D dans $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

Exercice 2

1. $E\left(\frac{0+2}{2}; \frac{-1+3}{2}\right)$, soit $E(1; 1)$.

2. $\vec{GA} + \vec{GE} + \vec{GD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-x_G) + (1-x_G) + (2-x_G) = 0 \\ (-1-y_G) + (1-y_G) + (3-y_G) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x_G = 0 \\ 3-3y_G = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{5}{3} \\ y_G = 1 \end{cases}.$$

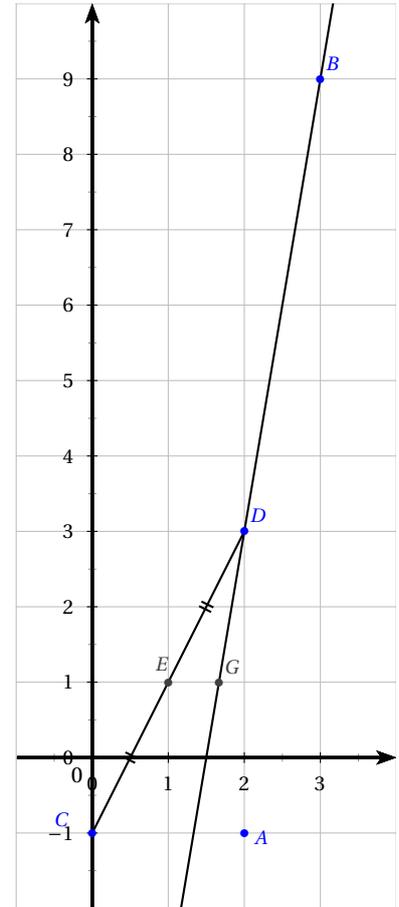
3. $\vec{BD}(-1; -6)$ et $\vec{BG}\left(-\frac{4}{3}; -8\right)$

Les vecteurs \vec{BD} et \vec{BG} sont colinéaires car $(-1) \times (-8) - (-6) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 0$.
Par conséquent les points B , D et G sont alignés.

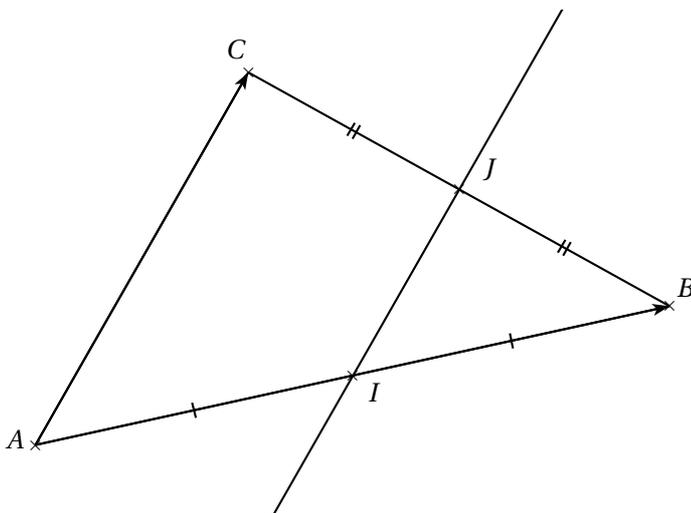
Le déterminant

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$ alors les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

En d'autres termes, si les coordonnées des vecteurs sont proportionnelles alors les vecteurs sont colinéaires.



Exercice 3



Conseils

Faites un schéma pour vous repérer. C'est important de bien visualiser la situation.

Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$, on a :

$A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ car J a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$.

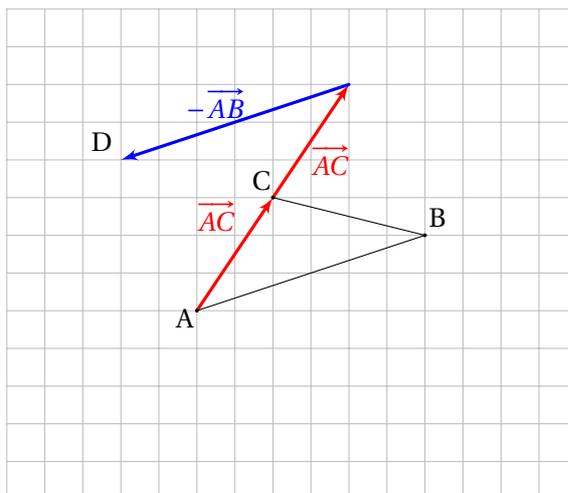
Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$, le vecteur \vec{IJ} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarque aisément que les vecteurs \vec{IJ} et \vec{AC} sont colinéaires car $\vec{AC} = 2\vec{IJ}$.

Les droites (IJ) et AC sont donc parallèles.

Exercice 4

$$1. \vec{AD} = -\vec{AB} + 2\vec{AC} \iff \vec{AD} = 2\vec{AC} - \vec{AB}.$$



$$2. \text{ a. } \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}.$$

b.

$$\begin{aligned} \vec{BD} &= \vec{BA} + \vec{AD} \\ &= -\vec{AB} - \vec{AB} + 2\vec{AC} \\ &= -2\vec{AB} + 2\vec{AC} \end{aligned}$$

3. On déduit des deux égalités vectorielles précédentes que :

$$\begin{aligned} \vec{BD} &= -2\vec{AB} + 2\vec{AC} \\ &= 2 \left(\underbrace{-\vec{AB} + \vec{AC}}_{=\vec{BC}} \right) \\ &= 2\vec{BC} \end{aligned}$$

Les vecteurs \vec{BC} et \vec{BD} sont donc colinéaires car il existe un réel k (ici $k = 2$) tel que $\vec{BD} = k\vec{BC}$.

Les points B , C et D sont alignés.

Et même mieux

On en déduit même que le point C est le milieu du segment $[BD]$ car $\vec{BD} = 2\vec{BC}$.

Exercice 5

1.

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \frac{5}{2}\vec{AB} + \vec{AC} + 4\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} \\
 &= \frac{5}{2}\vec{AB} + \vec{AC} - 4\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \\
 &= -\frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} \\
 &= \frac{3}{2}\vec{BA} + \frac{3}{2}\vec{AC} \\
 &= \frac{3}{2}(\underbrace{\vec{BA} + \vec{AC}}_{=\vec{BC}}) \\
 &= \frac{3}{2}\vec{BC}
 \end{aligned}$$

Explications

L'idée est de simplifier l'écriture du vecteur \vec{u} pour réussir à l'écrire en fonction de \vec{BC} . Je sais c'est pas évident mais il faut y arriver.

Par conséquent, \vec{u} est bien colinéaire au vecteur \vec{BC} .

2.

$$\begin{aligned}
 \vec{u} &= \vec{AC} + \vec{BA} + 2\vec{CB} \\
 &= \vec{AC} - \vec{AB} + 2(\vec{CA} + \vec{AB}) \\
 &= \vec{AC} - \vec{AB} + 2\vec{CA} + 2\vec{AB} \\
 &= -\vec{AC} + \vec{AB}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v} &= 2\vec{AC} - \vec{CB} + \vec{BA} - \vec{AB} \\
 &= 2\vec{AC} - (\vec{CA} + \vec{AB}) - \vec{AB} - \vec{AB} \\
 &= 2\vec{AC} - \vec{CA} - \vec{AB} - 2\vec{AB} \\
 &= 3\vec{AC} - 3\vec{AB} \\
 &= -3(-\vec{AC} + \vec{AB}) \\
 &= -3\vec{u}
 \end{aligned}$$

Explications

L'idée est de simplifier les écritures des vecteurs \vec{u} et \vec{v} afin de les écrire en fonction des mêmes vecteurs (ici, \vec{AB} et \vec{AC}).

Par conséquent $\vec{v} = -3\vec{u}$ et donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont bien colinéaires.