ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 DÉRIVÉE (VIDÉO 1)

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

— **On admet** que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

— Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\ln'(x)\times\mathrm{e}^{\ln x}=\ln'(x)\times x$.
Or pour tout réel $x>0$, $f(x)=x$ d'où $f'(x)=1$
Ainsi pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)\times x=1$ donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

2 VARIATION (VIDÉO 2)

La fonction ln est dérivable donc continue sur $]0;+\infty[$.

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Comme $\ln 1=0$, on en déduit les propriétés suivantes :

Pour tout réel x strictement positif :
$\ln x=0$ si, et seulement si, $x=1$
$\ln x>0$ si, et seulement si, $x>1$
$\ln x<0$ si, et seulement si, $0<x<1$

D'où le tableau de variation de la fonction ln :

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On admet que :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$

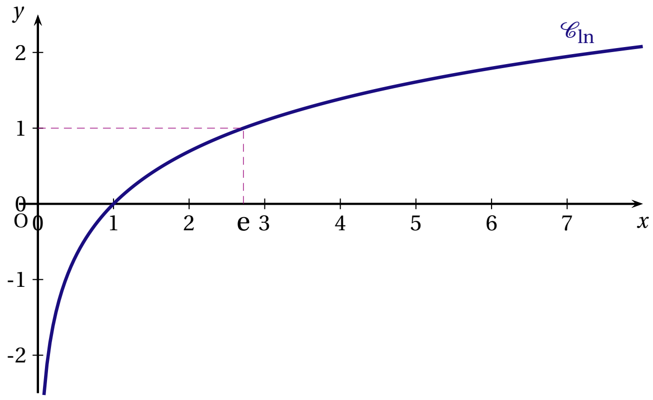
CONSÉQUENCE

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x>0$, $\ln x\in\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

Pour tout réel k, l'équation $\ln x=k$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution $x=\mathrm{e}^{k}$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

Notons $\mathscr{C}_{\ln}$ la courbe représentative de de la fonction logarithme népérien.



4 FONCTION DU TYPE $\ln u$:

DÉRIVÉE :

Soit u une fonction positive sur un intervalle I, la fonction définie sur I par $x \mapsto \ln\left(u(x)\right)$ admet pour dérivée : $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$

EXEMPLE :

$$\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]' = \frac{2x}{x^2+1}$$