Introduction aux suites numériques

I Définition et notations d'une suite numérique :(vidéo 1)

1 Définition et notations :

Définition intuitive :
Une suite numérique est une liste de nombre réels, appelés des termes, qui sont « numérotés ».

Définition mathématique :
Une fonction numérique $u : n \to u(n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est appelée suite numérique.
Les images sont appelés des termes de la suite et sont notés u_n qu'on lit u u indice $\boldsymbol{n}$»
Les antécédents n, des entiers naturels, sont appelés les rangs (ou les indices) des termes.

2 Exemple :

Dans la première activité, on avait : $1;3;5;7;\ldots$
Si on appelle u_1 le premier terme, on aurait : $u_1 = 1; u_2 = 3;\ldots\ldots u_4 = 7$
u_4 est le terme de rang 4

Attention au premier terme :
Selon les situations, on pourra faire commencer la suite par u_0 ou u_1.
Attention, si u_0 est le premier terme, u_1 en est le 2ème, u_2 le 3ème et ainsi de suite.
En reprenant l'exemple précédent, on aurait alors : $u_0 = 1; u_1 = 3;\ldots\ldots u_3 = 7$
u_3 serait alors le terme de rang 4
Il y aurait un décalage entre l'indice du terme et le nombre de terme de la suite.

II Les deux principaux modes de génération d'une suite :

1 Suite définie par une fonction explicite :(vidéo 2)

Définition :
Une suite (u_n) est définie de manière explicite si son terme général s'écrit en fonction de n

Exemple :

Reprenons encore l'exemple plus haut.
Par quelle relation pourrions nous définir la suite (u_n) définie pour tout entier n ?

- si le premier terme est u_0
  Pour tout entier n, on aurait : $u_n = 2n+1$,
  Ainsi, $u_0 = 2\times 0+1 = 1$; $u_1 = 2\times 1+1 = 3$; etc...
- si le premier terme est $u1$
  Pour tout entier n, on aurait : $u_n = 2n-1$,
  Ainsi, $u_1 = 2\times 1-1 = 1$; $u_2 = 2\times 1-1 = 3$; etc...

L'intérêt d'une telle modélisation est de calculer $u_{100} = 2\times 100+1 = 201$, si le premier terme est u_0.

2 Suite définie par une relation de récurrence : (vidéo 3)

Définition :

Une suite (u_n) est définie par récurrence si on connait son premier terme et si son terme général s'écrit en fonction de termes précédents.

Exemple :

Reprenons l'activité de départ :
Si on appelle u_1 le premier terme, on aurait : $u_1 = 1; u_2 = 3; \ldots\ldots u_4 = 7$
Comment passe-t-on d'un terme au suivant :
On peut exprimer cette suite ainsi : $u_2 = u_1 + 1$; et $u_3 = u_2 + 2$ et ainsi de suite.
On ne définit plus le programme de calcul qui détermine u_n, mais l'algorithme qui fait passer d'un terme au suivant.

Attention !

Il ne faut pas confondre u_{n+1} qui est et $u_n + 1$.

- u_{n+1} est le terme de la suite d'indice $n+1$, le $n+1$ème terme si le premier terme est u_1.
- $u_n + 1$ est le terme d'indice n à qui on ajoute 1.

Remarque :

Pour définir une suite par une relation de récurrence, il faut évidemment donner l'algorithme de calcul qui permet de passer d'un terme d'indice n à un terme d'indice $n+1$ par exemple, mais il faut aussi absolument donner un premier terme pour initialiser l'algorithme.
Cette valeur initiale est indispensable.
Définir une suite récurrente par : $u_{n+1} = u_n + 2$ uniquement, ne permet pas de démarrer le moindre calcul, si on ne connaît pas un premier terme.

3 Utilisation de la calculatrice :(vidéo 4)

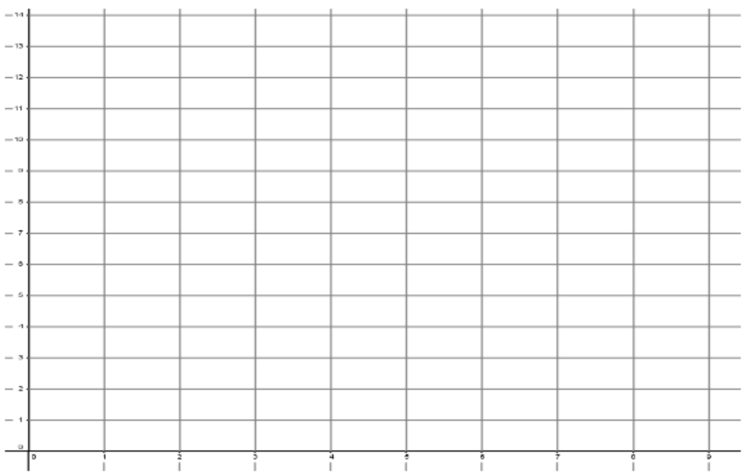
Exemple :

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 5}{2} \end{cases}$
Afficher à l'écran de la calculatrice les 10 premiers termes de cette suite

4 Représentation graphique d'une suite : (vidéo 5)

Exemple :

Représenter graphiquement les suites (u_n) et (v_n) définie pour tout entier n par $u_n = 3n - 4$ et $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases}$



III Sens de variation d'une suite :

1 Définitions :

- Une suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$, si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$, si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite est monotone si elle est croissante sur $\mathbb{N}$ ou décroissante sur $\mathbb{N}$

2 Méthode :

A l'usage, il est souvent pratique :

Soit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:(vidéo 6)

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemples :
En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$ donner le sens de variation de :

- La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 2n + 4$
- La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = n^2$
- La suite (u_n) définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

Soit d'étudier le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ (vidéo 7)

- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante
- Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemples :

- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 3^n$
- Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_{n+1} = 0,9u_n \end{cases}$

Soit d'étudier les variations de la fonction associée (vidéo 8)

Soit (u_n) une suite numérique définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

- Si la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Attention :

- La réciproque de cette propriété est fausse.
- Cette méthode ne fonctionne pas avec les suites définies par récurrence.

Exemples :
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - n + 3$