Correction : Travail complémentaire : Toussaint 2021

EXERCICE 1

• $a = f(0) = -2 \times 0^2 + 6 \times 0 - 4 = -4$.

• Les nombres b et c sont les deux solutions réelles de l'équation $f(x) = 0$:
Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-4) = 36 - 32 = 4 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-2}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+2}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Comme $b < c$, $b = 1$ et $c = 2$.

• d est l'abscisse du sommet de la parabole $\mathscr{P}$ représentative de f :
$d = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{-2 \times 2} = \dfrac{3}{2}$.

• e est l'ordonnée du sommet de $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} e = f(d) &= -2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \left(\frac{3}{2}\right) - 4 \\ &= -2 \times \left(\frac{9}{4}\right) + 9 - 4 \\ &= -\frac{9}{2} + 5 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

• Enfin k est l'abscisse du point de $\mathscr{P}$ d'ordonnée $-1,5$. On résout donc l'équation $f(k) = -1,5$:

$$\begin{aligned} f(k) = -\frac{3}{2} &\iff -2k^2 + 6k - 4 = -1,5 \\ &\iff -2k^2 + 6k - 4 + 1,5 = 0 \\ &\iff -2k^2 + 6k - 2,5 = 0 \end{aligned}$$

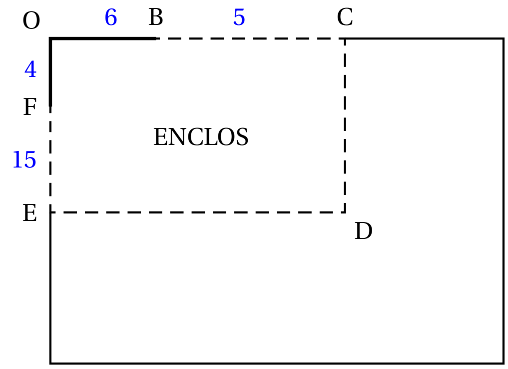
Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-2) \times (-2,5) = 36 - 20 = 16 > 0$.
L'équation admet donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-4}{-4} = \frac{5}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+4}{-4} = \frac{1}{2}$$

Comme $0 < k < b$ avec $b = 1$, $k = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 2



1. **a.** Le grillage utilisé est donné par :

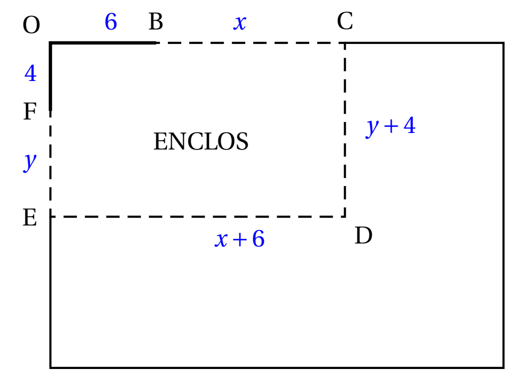
$$FE + ED + DC + CB = 15 + 11 + 19 + 5 = 50 \text{ m}$$

Elle utilise donc bien tout le grillage.

b. L'aire de l'enclos est donnée par :

$$OC \times OE = 11 \times 19 = 209 \text{ m}^2$$

2. **a.** Comme la longueur du grillage est 50 m, on obtient l'égalité :



$$y + (x+6) + (y+4) + x = 50$$

Soit $2y + 2x + 10 = 50$, soit $2y = 40 - 2x$, soit $y = 20 - x$.

b. L'aire de l'enclos est alors donnée par :

$$(x+6)(y+4)$$

$$\begin{aligned}(x+6)(y+4) &= (x+6)(20-x+4) \quad \text{Car } y = 20 - x.\\ &= (x+6)(24-x)\\ &= 24x - x^2 + 144 - 6x\\ &= -x^2 + 18x + 144\end{aligned}$$

On a donc bien $A(x) = -x^2 + 18x + 144$. La formule de Nabolos est correcte.

3. La fonction A est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 18$ et $c = 144$.
Elle est donc croissante puis décroissante puisque $a < 0$.
$\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{18}{2 \times (-1)} = 9$.

On en déduit le tableau de variations sur $[0 ; 18]$:

x	0		9		18
$A(x)$	144	↗	225	↘	0

- $A(0) = 144$
- $A(9) = -9^2 + 18 \times 9 + 144 = 225$.
- $A(18) = -0,5 \times 8^2 + 4 \times 8 = 144$.

L'aire de l'enclos est maximale lorsque $x = 9$. La largeur de l'enclos est $x + 6 = 15$ m et sa longueur est $y + 4 = 20 - x + 4 = 15$ m.
C'est un carré ! L'aire maximale est 225 m^2.