Préparation au Devoir Surveillé de mathématiques

EXERCICE 1

La fonction f est une fonction trinôme du second degré car elle est de la forme ax^2+bx+c avec $a=2$, $b=-1$ et $c=-1$.

1. L'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse -1 est donnée par $f(-1)$.
$f(-1)=2\times(-1)^2-(-1)-1=2+1-1=2$.
Le point A a pour ordonnée 2.

2. **a.** La forme canonique de f est donnée par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$.

- $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{-(-1)}{2\times 4}=\dfrac{1}{4}$.
- $\beta=f\left(\dfrac{1}{4}\right)=2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{4}-1=\dfrac{1}{8}-\dfrac{2}{8}-\dfrac{8}{8}=-\dfrac{9}{8}$.

La forme canonique est : $f(x)=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}$.

b. $a>0$, donc f est d'abord décroissante, puis croissante.
$\alpha=\dfrac{1}{4}$ et $\beta=-\dfrac{9}{8}$

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$

c. $f(x)=0 \iff 2x^2-x-1=0$.
On reconnaît une équation du second degré.
$\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-1)=9$.
$\Delta>0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1=\dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times 2}=1$; $x_2=\dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times 2}=-\dfrac{1}{2}$
$\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right\}$.

d. D'après le cours, la forme factorisée de $f(x)$ est $a(x-x_1)(x-x_2)$ soit $f(x)=2(x-1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

e. D'après le cours„ le trinôme est du signe de a sauf entre les racines. On en déduit le tableau de signes de $f(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. **a.** La parabole se situe sous l'axe des abscisses lorsque $f(x) < 0$ soit sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

b. Le minimum de f est $-\frac{9}{8}$. Or, $-\frac{9}{8} = -1,125 > -1,2$.
On en déduit que la parabole ne coupe pas la droite d'équation $y = -1,2$.

c. $-0,1$ et $0,1$ appartiennent à l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{4}\right]$. Sur cet intervalle, la fonction f est strictement décroissante. On en déduit que les nombres et les images sont dans l'ordre inverse.

$$\text{Comme } -0,1 < 0,1 \quad \text{alors} \quad f(-0,1) > f(0,1)$$

d. La fonction g est définie si et seulement si $2x^2 - x - 1 \geqslant 0$.
Ainsi, $\mathscr{D}_g = \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [1\ ;\ +\infty[$.

Explication :
La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. La fonction g est définie lorsque les images par la fonction f sont positives.

EXERCICE 2

1. Calcul de $f\left(-\frac{4}{3}\right)$.

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{4}{3}\right) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 8 \times \left(-\frac{4}{3}\right) - 16 \\
&= 3 \times \frac{16}{9} - \frac{32}{3} - 16 \\
&= \frac{48}{9} - \frac{96}{9} - \frac{144}{9} \quad \text{Mise au même dénominateur.} \\
&= -\frac{192}{9} \\
&= -\frac{64}{3}
\end{aligned}$$

Conseil :
Vous pouvez utiliser votre calculatrice pour vérifier votre calcul.

2. La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$, $b = 8$ et $c = -16$.
Elle est donc décroissante puis croissante puisque $a > 0$.
$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \times 3} = -\frac{4}{3}$.

On en déduit le tableau de variations sur $[-5\ ;\ 2]$:

x	-5	$-\dfrac{4}{3}$	2
$f(x)$	19 ↘	$-\dfrac{64}{3}$	↗ 12

- $f\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{64}{3}$
- $f(-5) = 3\times(-5)^2 + 8\times(-5) - 16 = 19.$
- $f(2) = 3\times 2^2 + 8\times 2 - 16 = 12.$

3. **a.** Pour démontrer cette égalité, on développe l'expression $(3x-4)(x+4)$.

$$\begin{aligned}(3x-4)(x+4) &= 3x^2+12x-4x-16\\ &= 3x^2+8x-16\\ &= f(x)\end{aligned}$$

Explications :
Pour démontrer l' égalité $f(x) = (3x-4)(x+4)$, on est parti du membre de droite et on a développé pour retrouver le membre de gauche. Faites attention de ne pas écrire la conclusion au départ :
pour être plus clair, ne commencez pas en écrivant :
$f(x) = (3x-4)(x+4) = ...$

Ainsi, pour tout réel x de $[-5\,;\,2]$, $f(x) = (3x-4)(x+4)$.

b. Points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.
Les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses sont donnés par les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On prend la forme factorisée pour résoudre cette équation.

Évidemment :
Si on ne prend pas la forme factorisée, on se retrouve avec une équation du second degré ($3x^2 + 8x+16 = 0$) que l'on ne sait pas encore résoudre.... patience.... ça va venir.

$$\begin{aligned}(3x-4)(x+4) &= 0 \quad \text{C'est une équation produit nul.}\\ 3x-4=0 &\quad \text{ou} \quad x+4=0\\ 3x=4 &\quad \text{ou} \quad x=-4\\ x=\frac{4}{3} &\quad \text{ou} \quad x=-4\end{aligned}$$

La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en $(-4\,;\,0)$ et $\left(\dfrac{4}{3}\,;\,0\right)$.

c. Résolution de l'inéquation.

On prend encore la forme factorisée.

Explications
Même si les solutions apparaissent sur le graphique donné, on attend ici une méthode algébrique.
Le graphique permettra de vérifier les solutions trouvées.

$3x-4$ s'annule pour $x = \dfrac{4}{3}$ et $x+4$ s'annule pour $x = -4$. On en déduit le tableau de signes :

x	-5		-4		$\frac{4}{3}$		2
Signe de $3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\underbrace{\qquad}_{f(x)>0}$ $\underbrace{\qquad}_{f(x)>0}$

$\mathscr{S} = [-5\,;\,-4[\cup\left]\frac{4}{3}\,;\,2\right]$. Graphiquement, cela signifie que la parabole se situe au-dessus (ou sur) de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-5\,;\,-4[$ et sur $\left]\frac{4}{3}\,;\,2\right]$.

EXERCICE 3

- Partie A -

1. 10 est l'abscisse du sommet de la parabole (la fonction f est une fonction polynôme du second degré). Cette abscisse se calcule à l'aide de la formule $-\frac{b}{2a}$, soit $-\frac{-40}{2\times 2} = 10$.

2. **a.** La forme canonique de $f(x)$ est $a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a=2$, $\alpha=10$ et $\beta = f(\alpha) = 200$.

   Ainsi la forme canonique de $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = 2(x-10)^2+200$$

   b. Le minimum de f est 200. cela signifie que le polynôme $f(x)$ n'a pas de racines. Ainsi, $\Delta < 0$.

   • **Affirmation 1 :** la fonction f est strictement croissante sur $[10\,;\,20]$, donc si $x > 13$, alors $f(x) > f(13)$ soit $f(x) > 218$.
   L' affirmation 1 est vraie.

   • **Affirmation 2 :** En prenant $x = 0$, on a $f(0) = 400 > 218$ et pourtant 0 n'est pas supérieur à 13.
   Contre-exemple : Pour montrer qu'une affirmation est fausse, on trouve un nombre x qui vérifie l'hypothèse $f(x) > 218$ mais qui ne vérifie pas la conclusion : 0 vérifie bien l'hypothèse $f(0) > 218$ mais pas la conclusion car $0 < 13$.

   L' affirmation 2 est fausse.

Partie B -

1. Si l'un des deux morceaux pèse 13 grammes, l'autre pèse 7 grammes $(20-13=7)$.
   La valeur de ces deux morceaux est donc donnée par :

$$13^2+7^2 = 218$$

La valeur totale est bien de 218 €.

2. Si x est la masse d'un des morceaux, l'autre a une masse de $(20-x)$.
La valeur totale est donnée par $x^2+(20-x)^2$.

On développe :

$$\begin{aligned} x^2+\underbrace{(20-x)^2}_{(a-b)^2} &= x^2+\underbrace{400}_{a^2=20^2}-\underbrace{40x}_{2ab=2\times x\times 20}+\underbrace{x^2}_{b^2=x^2} \\ &= 2x^2-40x+400 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. **a.** Si la pierre se brise en deux morceaux de même masse (c'est-à-dire en deux morceaux de 10 g chacun), on obtient une valeur totale de 200 € d'après le tableau de variations (car $f(10)=200$).
Cette valeur est la valeur minimale de la fonction f. On peut donc dire que du point de vue du propriétaire, la pire des situations est que la pierre se brise en deux morceaux de même masse.
L'affirmation est donc vraie.

b. Le maximum de la fonction f est 400. Ainsi si la pierre se brise en deux morceaux, sa valeur ne dépassera jamais 400 € ce qui est sa valeur si elle ne se brise pas ($20^2=400$).
L'affirmation est donc fausse.
Pensez-y!La valeur totale des deux morceaux est donnée par la fonction f.

EXERCICE 4

1. Il suffit de calculer la hauteur du ballon lorsque la distance horizontale à partir du tir est de 28 mètres. Autrement dit, il faut calculer $f(28)$.
$f(28)=-\dfrac{28^2}{32}+28=3,5$.
$3,5>2,1$ donc Jérémyos ne pourra pas toucher le ballon. Il est trop petit :-)

2. Le ballon retombe pour la valeur de x qui vérifie $f(x)=0$.

$$f(x)=0$$

$$-\frac{x^2}{32}+x=0$$ Le calcul du discriminant est ici inutile, du fait de la factorisation.

$$-\frac{1}{32}x^2+x=0$$

$$x\left(-\frac{1}{32}x+1\right)=0$$

$$x=0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{32}x+1=0$$

$$x=0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{32}x=-1$$

$$x=0 \quad \text{ou} \quad x=-1\times\frac{-32}{1}$$

$$x=0 \quad \text{ou} \quad x=32$$

Le ballon retombe à 32 mètres de Clémentos (on est bien loin de son record du monde!).