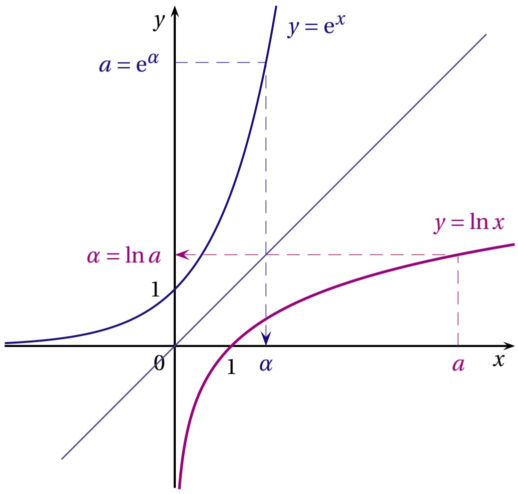
I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 INTRODUCTION : (VIDÉO 1)

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x, $e^x \in]0;+\infty[$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

Pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel α tel que $e^\alpha = a$

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2 DÉFINITION : (VIDÉO 2)

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $e^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = e^y$$

REMARQUES

— On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
— $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
— $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

3 CONSÉQUENCES IMMÉDIATES (VIDÉO 3)

1. Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
3. Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

❊ DÉMONSTRATION

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff e^y = x$. Soit $e^{\ln x} = x$.

2. Pour tout réel x, $e^x = y \iff x = \ln(y) = \ln\left(e^x\right)$. Soit $\ln\left(e^x\right) = x$.

EXEMPLES

$e^{\ln 5} == 5$; $e^{-\ln 0,1} = \dfrac{1}{e^{\ln 0,1}} = \dfrac{1}{0,1} = 10$; $\ln\left(\sqrt{e}\right) = \ln\left(e^{0,5}\right) = 0,5$; $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln\left(e^{-1}\right) = -1$.

4 VARIATION : (VIDÉO 4)

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

❊ DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$ et $b = e^{\ln b}$. Ainsi, $e^{\ln a} < e^{\ln b}$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on en déduit que $\ln a < \ln b$.

CONSÉQUENCES

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$

$\ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$

EXEMPLE

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2x$.
La fonction f est dérivable et pour tout réel x, $f'(x) = e^x - 2$.
On a donc : $f'(x) = 0 \iff e^x - 2 = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$.
On a également $f'(x) < 0 \iff e^x < 2 \iff x < \ln 2$.
Les variations de f se déduisent du signe de sa dérivée. D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$	

II PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES :(VIDÉO 5)

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

DÉMONSTRATION

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,
Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$, $b = e^{\ln b}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$
D'autre part,

$$a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$$

D'où

$$e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$$

Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

1. $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
2. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$
4. $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a$

DÉMONSTRATIONS

1. Soit $a > 0$ alors $\dfrac{1}{a} > 0$. Or $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc
$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln\frac{1}{a} = 0 \iff \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$
2. Soient $a > 0$ et $b > 0$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$
3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,
$$\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } \mathrm{e}^{n\ln a} = \left(\mathrm{e}^{\ln a}\right)^n = a^n$$
Donc $\mathrm{e}^{\ln(a^n)} = \mathrm{e}^{n\ln a}$ et par conséquent, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.
4. Soit $a > 0$ alors $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ donc
$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a}\right)^2 = 2\ln\sqrt{a}$$

III LOGARITHME DÉCIMAL

1 DÉFINITION :

La fonction logarithme décimal, notée log, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Valeurs particulières :

- $\log(1) = \ldots,$
- $\log(10) = \ldots$
- $\log(100) = \ldots$
- $\log(0,1) = \ldots$
- $\log(0,01) = \ldots$

2 PROPRIÉTÉ :

- Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\log(ab) = \ldots\ldots.$
- Pour tout réel $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $\log(a^n) = \ldots.$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\log(10^n) = \ldots.$
  $n = \log a \iff a = \ldots$

Le logarithme décimale est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$: $\log(10^x) = x$ et, $10^{\log(x)} = x$

3 REMARQUE :

Le logarithme népérien est parfois notée (dans la littérature anglo-saxone notamment) log au lieu de ln, tandis que le logarithme décimal est noté $\log_{10}$, ou encore Log.