Introduction aux probabilités :

1 Définitions et vocabulaire :

1.1 Expérience aléatoire.

On appelle **expérience aléatoire** une expérience ayant des résultats que l'on est capable de décrire, mais dont on ne sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on la réalise.

Exemples classiques :

Le lancer d'un dé, tirer une carte au hasard dans un jeu, tirer une boule dans une urne (comme au loto) sont des expériences aléatoires.

On connaît les résultats possibles mais on ne sait pas lequel va se produire avant l'expérience réalisée.

1.2 Issues, Univers et événements

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelées **issues**

L'ensemble des éventualités est appelé **univers**; on le note souvent Ω (notation lycée)

On appelle **événement** d'une expérience aléatoire une partie de l'univers.

Exemple :

Expérience aléatoire : On lance un dé à 6 faces.

Les issues de cette expérience sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

L'univers de cette expérience aléatoire est $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$

- « obtenir un 6 » , « obtenir un nombre pair » sont des événements
- Comme « obtenir un 6 » ne contient qu'une seule issue on dit que c'est un événement élémentaire.
- « obtenir un nombre pair » et « obtenir un nombre impair » sont des événements complémentaires car ils n'ont aucune issue en commun et couvrent tout l'univers.
- « Obtenir un 8 » est un événement impossible
- « Obtenir un entier inférieur à 8 » est un événement certain

2. Probabilité d'un événement :

2.1. Définition

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée probabilité**.**

2.2. Calcul d'une probabilité :

Pour calculer la probabilité d'un événement A, on peut appliquer la formule suivante :

$$P(A)=\frac{nombres\ d'\ issues\ de\ l'\ événement\ A}{nombre\ d'\ issues\ de\ l'\ expérience}$$

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

On appelle A l'événement « *obtenir le 8 de cœur* » et B l'événement « *obtenir un as* »

$nombres\ d'\ issues\ de\ l'\ événement\ A=1$ (1 seul 8 de cœur)

$nombre\ d'\ issues\ de\ l'\ expérience=32$ (il y a 32 cartes)

donc $P(A)=\frac{nombres\ d'issues\ de\ l'événement\ A}{nombre\ d'issues\ de\ l'expérience}=\frac{1}{32}$

de même $P(B)=\frac{nombres\ d'issues\ de\ l'événement\ B}{nombre\ d'issues\ de\ l'expérience}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

2.3. Propriétés

- La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1

  exemple : Dans l'exemple précédent, $P(B)=\frac{1}{8}=0{,}125$

- La probabilité de l'événement impossible est 0

  exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

  Soit C l'événement : « obtenir un 7 » $P(C)=\frac{0}{6}=0$

- La probabilité de l'événement certain est 1.

  exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

  Soit D l'événement : « obtenir un nombre inférieur à 7 » $P(D)=\frac{6}{6}=1$

- **La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.**

  exemple : On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.

  $P(obtenir\ 1)+P(obtenir\ 2)+P(obtenir\ 3)+P(obtenir\ 4)+P(obtenir\ 5)+P(obtenir\ 6)=\frac{6}{6}=1$

- Plus la probabilité d'un événement est proche de 1, plus l'événement a des « chances » de se réaliser
- Lorsque chaque événement a la même probabilité de se réaliser, on dit que les événements sont équiprobables
  exemple : Il y a autant de chances de tirer un 1 , un 2 , … ou un 6 avec un dé non pipé. On dit que ce sont des événements équiprobables.
- **La somme des probabilités d'un événement et de son événement contraire est égale à 1**

  exemple : Soit H l'événement : {ne pas obtenir un 6} avec un dé à 6 faces.

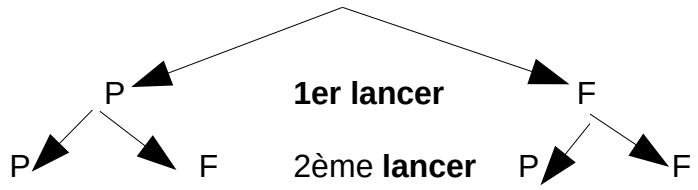
  On appelle G son événement contraire. G : {obtenir un 6}

  $P(H)+P(G)=$..... Donc $P(H)=1-P(G)=$.....

  $P(H)+P(G)=1$ Donc $P(H)=1-P(G)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

3. Expériences successives

Exemple : On lance une pièce de monnaie plusieurs fois et on relève Pile ou Face à chaque tirage

Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois Pile en deux tirages ?

Stratégie : on construit un arbre des expériences