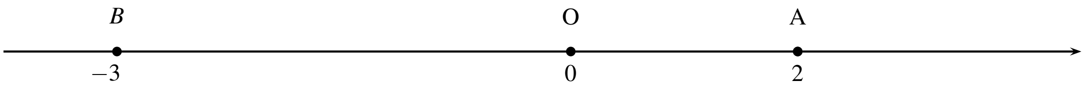
Valeur absolue d'un nombre réel

I VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

1 POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

Sur une droite graduée munie d'une origine O et d'une graduation, on considère un point M d'abscisse x.
La valeur absolue de x, notée $|x|$ est le nombre égal à la distance OM.

Exemple :
On considère la droite graduée ci-dessous, d'origine O et dotée des points A et B, d'abscisse respective 2 et -3.



Par application de la définition, $OA = |2|$ et $OB = |-3|$
Comme on sait que $OA = 2$ et $OB = 3$, on en déduit que : $|2| = 2$ et $|-3| = 3$
Comme une distance est positive,

- Si l'abscisse est positive, la valeur absolue de l'abscisse est égale à l'abscisse.
- Si l'abscisse est négative, la valeur absolue de l'abscisse est égale à l'opposé de l'abscisse.

2 POINT DE VUE ALGÉBRIQUE

On appelle valeur absolue d'un réel x, le nombre noté $|x|$ tel que :

- Si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$
- Si $x \leqslant 0$ alors $|x| = -x$

Exemples :

- $A = |4|$, comme $4 > 0$ alors $|4| = 4$ donc $A = 4$
- $B = |-3|$, comme $-3 < 0$, on a $|-3| = -(-3) = 3$ donc $B = |-3| = 3$
- $C = |1-\sqrt{3}|$. Comme $\sqrt{3} > 1$, on a $1-\sqrt{3} < 0$. Donc $C = |1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$
- $D = |x-2|$.
  Si $x > 2$ alors $x-2 > 0$, donc $|x-2| = x-2$
  Si $x < 2$ alors $x-2 < 0$, donc $|x-2| = -(x-2) = -x+2$

3 PROPRIÉTÉS :

- $|0| = 0$,
- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
  Application : $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

II DISTANCE ENTRE DEUX NOMBRES

1 PROPRIÉTÉ (ADMISE)

La distance d entre deux nombres a et b est égale à $|a-b|$

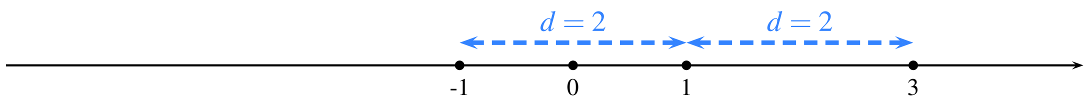
EXEMPLES :

- La distance entre 3 et 1 vaut : $d = |3-1| = |2| = 2$.
- Elle est évidemment égale à la distance entre 1 et 3 : $d = |1-3| = |-2| = 2$.
- La distance entre -4 et -1 vaut : $d = |-4-(-1)| = |-4+1| = |-3| = 3$.

2 APPLICATIONS

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|x-1| = 2$.

Résolution géométrique :
Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|x-1| = 2$ est équivalent à chercher les réels x dont la distance à 1 est égale à 2.



Graphiquement, on trouve : $S = \{-1; 3\}$

III RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE D'ÉQUATIONS :

PROPRIÉTÉ

Soit $a \in R_+$, X une expression algébrique.
Les solutions de l'équations $|X| = a$, est la réunion des solutions des deux équations :

$$X = a \quad \text{et} \quad X = -a$$

Application :
Pour résoudre dans $\mathbb{R}$, $|2x-1| = 3$

On résout donc deux équations :

$2x - 1 = 3$
$\iff 2x = 4$
$\iff x = 2$

$2x - 1 = -3$
$\iff 2x = -2$
$\iff x = -1$

On obtient : $S = \{-1; 2\}$