Limites de suites

I Généralités avec les suites (rappels) :

A Suite définie de manière explicite:

Définition 1 :
Une suite (u_n) est définie de manière explicite si son terme général s'écrit en fonction de n.

Exemple 1 :
On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n, tel que $u_n = 2n + 3$
Pour ce type de suites, on peut choisir directement le rang n, pour lequel on veut calculer u_n.
Par exemple, ici, $u_{23} = 2 \times 23 + 3 = 49$

B Suite définie par une relation de récurrence:

Définition 1 :
Une suite(u_n) est définie par récurrence
si on connait son premier terme et si son terme général s' écrit en fonction de termes précédents.

Exemple 1 :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n, tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

On a alors par exemple: $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 + 1 = 3$
La définition d'une suite par récurence illustre l'algorithme de construction de la suite pour passer d'un rang au rang suivant. C'est pratique pour comprendre le programme de la suite, étape par étape.
Inversement, pour calculer le terme de rang 23 par exemple, il faut connaître le terme de rang 22, qui necessite la connaissance du terme de rang 21, etc...

II Limites de suites :

A Approche intuitive :

Chercher la "limite" d'une suite, c'est analyser le comportement des termes de cette suite quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.
Pour modéliser ce concept, on dit que n tend vers $+\infty$.

Exemple 1 :
La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$ a pour limite $+\infty$.
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite pourvu qu'on choisisse un rang n suffisamment grand.
Par exemple, est-il possible de trouver un rang n, tel que $u_n > 1000000$?
On résout : $2n + 1 > 1000000 \iff n > \dfrac{999999}{2} \approx 500000$
Pour tout entier supérieur à 500000, on a donc $u_n > 1000000$

B Limite infinie :

Définition 1 :
On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand et on note: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque 1 :
La même définition en langage mathématique donnerait :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N, u_n > A$

Remarque 2 :
Pour une limite égale à $-\infty$, on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

C Limite finie :

Exemple 1 :
Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

$u_{10} = 1 - \dfrac{1}{10} = 0,9$

$u_{100} = 1 - \dfrac{1}{100} = 0,99$

$u_{1000} = 1 - \dfrac{1}{1000} = 0,999$

On conjecture que la fraction $\dfrac{1}{n}$ devient négligeable devant 1 quand n devient très grand.
En conséquence, il semble que la limite de cette suite soit égale à 1.

Définition 1 :
On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si u_n est aussi proche de L que l'on veut pourvu que n soit suffisamment grand et on note: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

Application :
En reprenant la conjecture précédente, avec $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, on noter : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Définition 2 :
Une définition mathématique de la convergence d'une suite (u_n) vers un réel L est :
$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - L| < \epsilon$

D Suites convergentes et suites divergentes :

Définition 1 :
On dit qu'une suite qui admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$ **converge** vers L.
On dit aussi qu'une telle suite est **convergente**.

Exemple 1 :

On peut dire que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ converge vers 1.

(u_n) est donc une suite convergente.

Définition 2 :
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple 2 :
On a vu précedemment que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$ a pour limite $+\infty$.
(u_n) est donc une suite **divergente**. Sa limite n'est pas finie.
On peut dire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Remarque 1 :
Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1.
C'est une suite alternée, qui n'admet donc pas de limite. Elle est donc divergente.

E Limites de suites de références (propriétés admises):

Propriété 1 :

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

III Opérations sur les limites

A Limite d'une somme (propriétés admises):

Exemple 1 :
Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1000$
Rédaction :
On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1000 = +\infty$
Quelquesoit la constante, il existe toujours un n assez grand pour que n^2 l'emporte et fasse tendre la suite vers $+\infty$.

Exemple 2 :
Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$
par $u_n = n^2 - n$ et $v_n = n - n^2$
On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
Les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc toutes les deux des différences de suites qui tendent vers l'infini.
On conjecture les limites de ces suites :
$u_{100} = 100^2 - 100 = 9900.$
On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
On analyse cette conjecture en observant que pour des n très grand, $n^2 \gg n$.
On dit que n^2 l'emporte sur n pour des grandes valeurs.
Inversement, $v_{100} = 100 - 100^2 = -9900.$
On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Les deux suites n'ont pas la même limite,
on ne peut donc pas donner un résultat général pour le schéma :" $+\infty - \infty$".

Tableau récapitulatif des sommes de limites (admis) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Propriété 1 :
- On retient qu'on peut opérer avec les limites, quand les suites convergent.
- Une limite infinie l'emporte toujours sur une limite finie.
- Deux limites infinies de même signes ne changent pas la limite infinie.
- **Attention, deux limites infinies de signes opposés donnent une Forme Indeterminée, F.I. en abrégé.**

Méthode :

Lever une indertermination : $+\infty - \infty$

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 4n$.
On conjecture que le terme de plus haut degré l'emporte en $+\infty$.
Pour le prouver, on factorise par ce terme :
$u_n = 2n^2 - 4n = n^2\left(2 - 4 \times \dfrac{1}{n}\right)$.
On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
donc avec la propriété des produits de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 \times \dfrac{1}{n} = 0$.
Avec la propriété des sommes de limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - 4 \times \dfrac{1}{n} = 2$
Ce qui permet de conclure, avec la propriété des sommes de limites :
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(2 - 4\dfrac{1}{n}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

B Limite d'un produit (propriétés admises):

Exemple 1 :
1 er cas : Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
par $u_n = n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$
On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
La suite $u_n \times v_n$ est donc une suite sur le schéma : $+\infty \times 0$
Or $u_n \times v_n = n^2 \times \dfrac{1}{n} = n$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$.

Exemple 2 :
2ème cas :
Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
par $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$
On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
La suite $u_n \times v_n$ est donc une suite sur le schéma : $+\infty \times 0$
Or $u_n \times v_n = n \times \frac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.
Donc $\lim\limits_{n \to 0} u_n \times v_n = 0$.

Les deux cas n'ont pas la même limite,
on ne peut donc pas donner un résultat général pour le schéma :"$\infty \times 0$".
On ne peut pas dire à l'avance qui l'emporte entre les deux suites.
C'est une forme Indertéerminée.

Tableau récapitulatif des produits de limites (admis) :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \times v_n =$	$L \times L'$	∞	∞	FI

Pour les infinis, on applique la règle des signes.
Attention, le produit d'une limite qui tend vers zéro et d'une suite qui tend vers vers l'infini
donne une Forme Indeterminée
(Pour effectuer ce test si vous n'avez pas de codes : user mathsguyon mdp : totoche)

Méthode :
Lever une indertermination : $+\infty \times 0$

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$ par $u_n = (n^2 - 1)\left(\dfrac{2}{n-2}\right)$.
On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$.
On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n-2} = 0$
On obtient donc une forme indéterminée : $\infty \times 0$.
On factorise chaque facteur par son terme de plus haut degré :
$u_n = n^2\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \times \dfrac{2}{n}\left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{n}}\right)$ ou encore : $u_n = 2n\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) \times \left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{n}}\right)$.
On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1$ et que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{n}} = 1$
donc avec la propriété des produits de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

C Limite d'un quotient (propriétés admises):

Tableau récapitulatif des quotients de limites (admis) :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	L	L	L	∞	∞
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	$L' \neq 0$	∞	0	L	∞
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{L}{L'}$	0	∞	∞	FI

On applique la règle des signes si besoin, selon le signe de L et de l'infini.

Exemple 1 :
Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$.
On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} = \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} = 2 + \dfrac{1}{n^2} = 2$,
par propriétés des sommes de limites.
On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} = n = +\infty$
On a alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2 + \dfrac{1}{n^2}}{n} = 0$
par application de la propriété des quotients de limites : $\dfrac{L}{\infty} \to 0$.

Exemple 2 :
1 er cas : Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
par $u_n = n^2$ et $v_n = n$.
On obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
2ème cas : Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
par $u_n = n$ et $v_n = n^2$
On obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
Les deux cas n'ont pas la même limite,
on ne peut donc pas donner un résultat général pour le schéma :"$\infty \times 0$".
On ne peut pas dire à l'avance qui l'emporte entre les deux suites.
C'est une forme Indertéerminée.

Méthode :

Lever une indertermination : $\dfrac{\infty}{\infty}$

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{n^2+2}{2n^2-1}$.

On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2+2 = +\infty$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2-1 = +\infty$.

On est donc sur une forme indéterminée : $\dfrac{\infty}{\infty}$

On factorise chaque expression par son terme de plus haut degré :

$u_n = \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)}$ ou encore : $u_n = \dfrac{1+\dfrac{2}{n^2}}{2-\dfrac{1}{n^2}}$

On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1+\dfrac{2}{n^2} = 1$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2-\dfrac{1}{n^2} = 2$

On a "levé" l'indétermination.

donc avec la propriété des quotients de limites : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

IV Limites et comparaisons

A Théorèmes de comparaison (admis)

Theoreme 1:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang N, on a $u_n < v_n$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Theoreme 2:

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang N, on a $v_n < u_n$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

Méthode :

Lever une indertermination avec un théorème de comparaison

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + \sqrt{2n^3+3n^2+4n+5}$.
L'expression sous la racine carrée est complexe
et n'est pas une fonction de "référence".
Pour lever cette difficulté, on remarque que :
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3n^2$
Or, on sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n^2 = +\infty$

En application du théorème de comparaison,
(u_n) étant supérieure à une suite divergente vers $+\infty$
on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

B Théorèmes d'encadrement (admis)

Theoreme 3:

Soit (u_n), (v_n) et (w_n), trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang N, on a $v_n < u_n < w_n$,

et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

Méthode :

Lever une indertermination avec le théorème des gendarmes

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5 + \cos(n)}{n}$.

On cherche à déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Pour tout entier naturel n non nul, on sait que:

$$\begin{aligned} & -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\ \iff & -1 + 5 \leq 5 + \cos(n) \leq 5 + 1 \\ \iff & 4 \leq 5 + \cos(n) \leq 6, \end{aligned}$$

on peut diviser par n car $n > 0$: $\dfrac{4}{n} \leq \dfrac{5 + \cos(n)}{n} \leq \dfrac{6}{n}$

Ce qui permet de déduire que : $\dfrac{4}{n} \leq u_n \leq \dfrac{6}{n}$

Or, d'une part: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ et d'autre part: $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6}{n} = 0$

La suite (u_n) est donc "encadrée" par deux suites qui convergent vers 0.

Donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$