Arithmétique

I Multiples et diviseurs

Définition 1 :
Soient a et b deux nombres entiers naturels.
• On dit que b **divise** a lorsqu'il existe un entier naturel q tel que $a = b \times q$.
• On dit encore que b est un **diviseur** de a ou que a est un **multiple** de b .)

Exemple 1 :
• On dit que 3 **divise** 15 car il existe un entier naturel **5** tel que $15 = \mathbf{5} \times 3$.
• On dit encore que 3 est un **diviseur** de 15 ou que 15 est un **multiple** de 3.)

Propriété 1 :
Pour $b \neq 0$, b est un **diviseur** de a si et seulement si a est un **multiple** de b.

Propriété 2 :
La somme de deux multiples d'un même entier relatif a est aussi un multiple de a

Démonstration Fondamentale :
Démonstration pour deux multiples de 11 :
Soit a et b deux multiples de 11.
D'après la définition de cours, il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que :
$a = 11 \times k_1$ et $b = 11 \times k_2$.
On a donc : $a + b = 11k_1 + 11k_2 = 11(k_1 + k_2)$
k_1 et k_2 étant des entiers, $(k_1 + k_2)$ est aussi un entier.
Appelons $q = k_1 + k_2$, on a montré que $a + b = 11 \times q$.
D'après la définition de cours, $a + b$ est donc un multiple de 11.

II Nombres premiers

Définition 1 :
Un entier naturel $p \geqslant 2$ est un **nombre premier** lorsque ses seuls diviseurs sont 1 et p.

Remarque 1 :

- Le nombre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.
- Les nombres premiers inférieurs à 20 sont : $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$

Propriété 1 :
(admise) : **Décomposition en facteurs de nombres premiers :**
Tout nombre entier peut s'écrire de façon unique comme un produit de facteurs de nombres premiers.

Application :
Comme : $1320 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $9900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$

On a alors : $\dfrac{1320}{9900} = \dfrac{2^3 \times 3 \times 5 \times 11}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11} = \dfrac{2}{3 \times 5} = \dfrac{2}{15}$

III Nombres pairs et impairs

Définition 1 :
On appelle **nombre pair**, tout entier multiple de 2 et **nombre impair** tout entier qui n'est pas pair.

Conséquence :

- Si p est un nombre pair alors il existe un entier n tel que $p = 2 \times n$
- Si p est un nombre impair alors il existe un entier n tel que $p = 2 \times n + 1$

Propriété 1 :
Le carré d'un nombre impair est un nombre impair

Démonstration Fondamentale :
Soit k un nombre impair.
On sait d'après la définition qu'il existe un entier n tel que : $k = 2 \times n + 1$
On a alors : $k^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$
Soit $p = 2n^2 + 2n$. p est clairement un entier.
On a montré qu'il existe un entier p tel que : $k^2 = 2p + 1$
Ce qui est la caractéristique d'un nombre impair.