Théorème de Thales et sa réciproque

I Enoncé du théorème de Thalès :

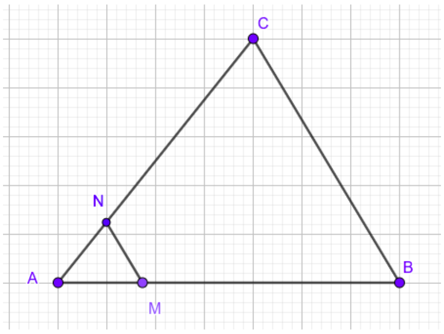
A Théorème de Thalès :

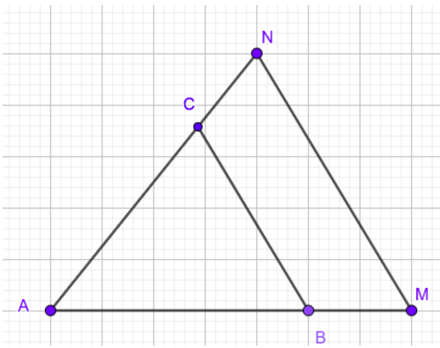
Propriété 1 :
Si deux triangles ABC et AMN sont tels que
- $\bullet M \in (AB)$
- $\bullet N \in (AC)$
- $\bullet (BC)//(MN)$

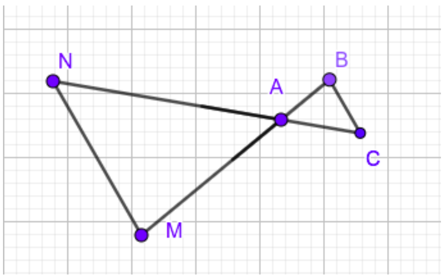
Alors on a l'égalité : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ $\dfrac{\text{côté du triangle AMN}}{\text{côté du triangle ABC}}$

B Situations de Thalès :

Illustration : Il y a 3 situations de Thalès :





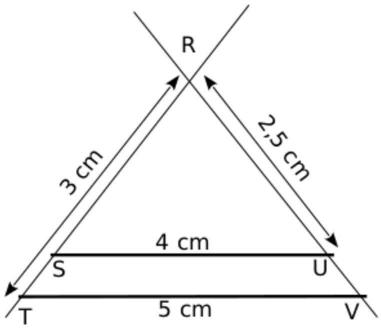


- Situation 1: $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ et $(MN)//(BC)$ (Attention à la notation $[AB]$ qui est un segment)
- Situation 2: $M \in [AB)$ et $N \in [AC)$ et $(MN)//(BC)$ (Attention à la notation $[AB)$ qui est une demi-droite)
- Situation 3 : $M \in AB$ et $N \in AC$ et $(BC)//(MN)$ (Attention à la notation (AB) qui est une droite)

On appelle la 3ème situation la situation : "papillon".

C Application en situation classique :

Exemple 1 :



Sur la figure ci-dessous, les points R, S, T d'une part
et les points $R, \cup, V$ d'autre part sont alignés.
Les droites (ST) et (TV) sont parallèles.
Calcule RS et RV.

Méthode :

Dans les triangles EMN et EFG, on a :

$\bullet S \in (RT)$

$\bullet U \in (RV)$

$\bullet (SU)//(TV)$

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{RS}{RT} = \frac{RU}{RV} = \frac{SU}{TV}$$

En remplaçant par les données numériques, on a :

$$\frac{RS}{3} = \frac{2,5}{RV} = \frac{4}{5}$$

Calcul de RS :

$\frac{RS}{3} = \frac{4}{5}$ d'où $RS \times 5 = 3 \times 4;$ Soit $RS = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$

Calcul de RV :

On part de :

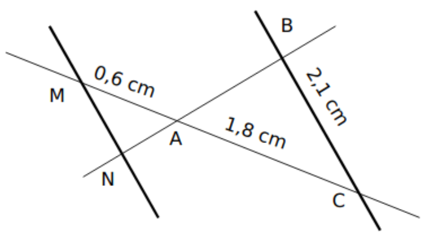
$\frac{2,5}{RV} = \frac{4}{5}$ Donc $RV \times 4 = 2,5 \times 5$

d'où $RV = \frac{12,5}{4} = 2 = \frac{25}{8} = 3,125$

D Application en situation "papillon"

Exemple 1 :

Les points M, A, C sont alignés et les points N, A, B aussi. On a $(MN)//(BC)$.



Calculer la longueur MN.

Méthode :
Dans les triangles AMN et ABC, on a

- $M \in (AC)$
- $N \in (AB)$
- $(BC)//(MN)$

D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{BC}$

En remplaçant par les données numériques, on a : $\frac{0,6}{1,8} = \frac{AN}{AB} = \frac{MN}{2,1}$

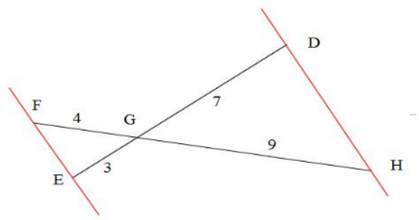
Calcul de MN:
$\frac{0,6}{1,8} = \frac{MN}{2,1}$ d'où $0,6 \times 2,1 = MN \times 1,8$
soit $MN = \frac{0,6 \times 2,1}{1,8}$ donc $MN = 0,7cm$

II Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Méthode :
Pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles,
on peut utiliser la **contrraposée** du théorème de Thalès.
C'est à dire que si on prouve que les **rapports de Thalès** ne sont pas égaux,
alors les droites ne seront pas parallèles.

Exemple 1 :

Dans cette figure, on donne:



$EG = 3cm$
$GD = 7cm$
$FG = 4cm$
$GH = 9cm$
Les droites (EF) et (HD) sont-elles parallèles?
On calcule séparément les rapports de Thalès:
$\frac{EG}{GD} = \frac{3}{7} = \frac{27}{63}$
$\frac{GF}{GH} = \frac{4}{9} = \frac{28}{63}$
On constate que $\frac{EG}{GD} \neq \frac{GF}{GH}$
Les droites (EF) et (HD) ne sont pas parallèles.

III Réciproque du Théorème de Thalès :

Propriété 1 :

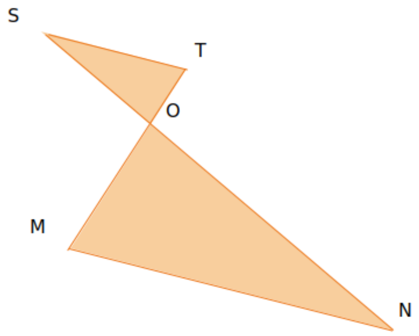
Réciproque du théorème de Thalès

Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.

- Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont **alignés dans le même ordre**
- $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Exemple 1 :
On donne $OM = 2,8cm$; $ON = 5,4cm$; $OS = 2,7cm$; et $OT = 1,4cm$



Démontre que les droites (MN) et (ST) sont parallèles.

Méthode :
On calcule séparément les rapports de Thalès:
D 'une part, $\dfrac{OS}{ON} = \dfrac{2,7}{5,4} = 0,5$
D 'autre part, $\dfrac{OT}{OM} = \dfrac{1,4}{2,8} = 0,5$
On constate que $\dfrac{OS}{ON} = \dfrac{OT}{OM}$
De plus, les points S, O, N une part et T, O, M d'autre part sont alignés **dans le même ordre** .
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès,
les droites (ST) et (MN) sont parallèles.

IV Agrandir ou réduire une figure

Propriété 1 :
Lorsque deux figures $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ ont la même forme et des longueurs proportionnelles, on dit que l'une est un **agrandissement** ou une **réduction** de l'autre.

Exemple 1 :
Voici trois photos d'un mathématicien célèbre :

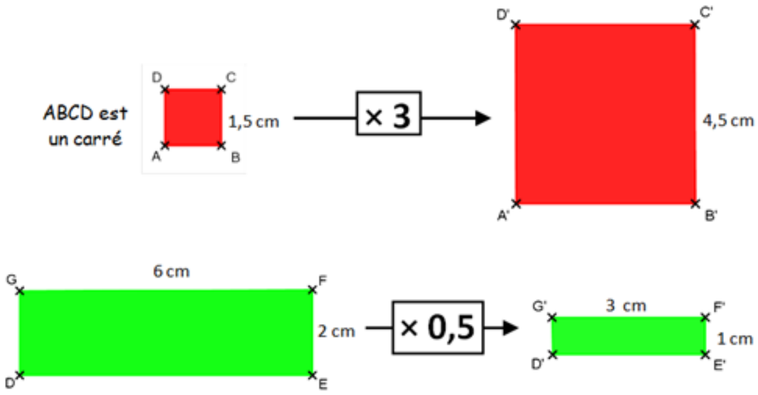
La 2ème image est plus petite que la première, mais ce n'est pas une réduction car elle n'a pas la même forme.
La 3ème image est bien une réduction de la première image car les longueurs sont proportionnelles et elles ont la même forme.

Propriété 2 :
Dans un agrandissement ou une réduction,
les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés.

Remarque 1 :
Si $\mathcal{F}$ est un agrandissement de $\mathcal{F}'$ alors $\mathcal{F}'$ est une réduction de $\mathcal{F}$.

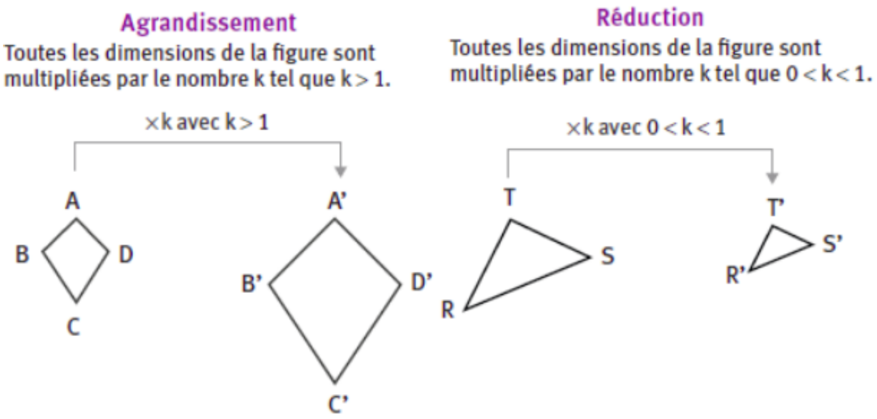
Remarque 2 :
Le coefficient de proportionnalité k est le rapport d'agrandissement ou de réduction.

Exemple 2 :



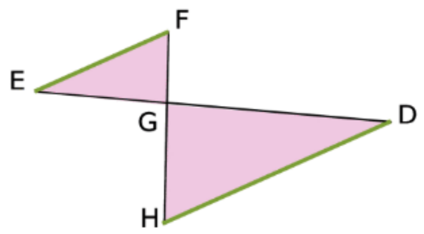
Le carré rouge de droite, A'B'C'D' est un agrandissement à l'échelle 3 du carré ABCD.
Le rectangle vert de droite, D'E'F'G' est une réduction à l'échelle $0,5$ du rectangle DEFG.

Remarque 3 :
Si $k>1$, c'est un agrandissement et si $0<k<1$, c'est une réduction.



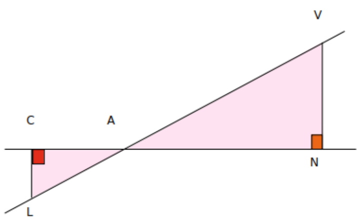
Exemple 3 :
On parle par exemple d'un agrandissement de rapport 3 (ou à l'échelle 3) ou bien d'une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ (ou d'échelle $\frac{1}{3}$) mais jamais de réduction à l'échelle 3 .

Exemple 4 :
Dans cette situation de Thalès, où $(HD)//(EF)$,
les deux triangles EFG et GHD ont leurs côtés propotionnels.
Le triangle EFG est une réduction du triangle GHD.
Le coefficient de réduction k se calcule en divisant les côtés respectifs :



$$k=\frac{GH}{GF}=\frac{GD}{GE}=\frac{HD}{EF}$$

Exemple 5 :
Les droites (VL) et (CN) sont sécantes en A. (LC) et (VN) sont perpendiculaires à (CN).



Le triangle LAC est-il une réduction du triangle VAN ?
Justifie ta réponse.

Méthode :

- Les triangles LAC et VAN sont deux triangles rectangles donc ils ont la même forme.
- Vérifions que les longueurs sont proportionnelles :

$\rightarrow$ Les droites (CN) et (VL) sont sécantes en A.

$\rightarrow$ Les droites (LC) et (NV) sont perpendiculaires à la même droite (AN) donc elles sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thales, on en déduit que : $\frac{AN}{AC} = \frac{AV}{AL} = \frac{NV}{LC}$

Les longueurs des triangles VAN et LAC sont donc proportionnelles.
On peut alors conclure que le triangle LAC est une réduction du triangle VAN.

V Triangles semblables

A Définition

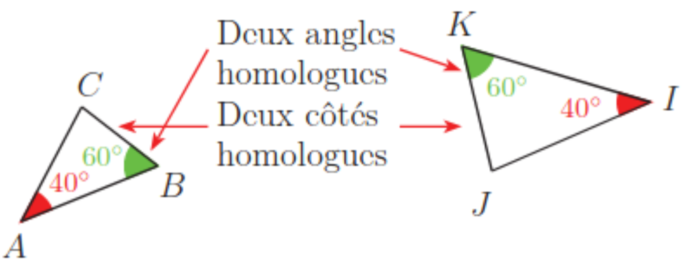
Définition 1 :
Deux triangles sont **semblables** ou de même forme s'ils sont leurs **angles deux à deux égaux**.

Propriété 1 :
Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ces triangles sont semblables.

Définition 2 :
Lorsque deux triangles sont semblables :

- Un angle d'un triangle et un angle de même mesure de l'autre triangle sont **homologues**;
- Les sommets (ou les côtés opposés) de deux angles **homologues** sont aussi **homologues**.

Exemple 1 :



$\widehat{ABC} = \widehat{JKI} = 60^\circ$ et $\widehat{BAC} = \widehat{JIK} = 40^\circ$
Donc $\widehat{ACB} = \widehat{IJK} = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$
Les deux triangles suivants sont **semblables** car les angles de même couleur sont de même mesure.

B Propriétés

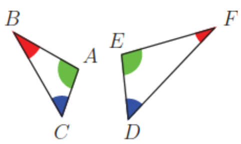
Propriété 1 :
Si deux triangles sont **semblables** alors les **longueurs** des côtés opposés aux angles égaux sont **proportionnelles**.

Propriété 2 :
(Réciproque) Si deux triangles ont **les longueurs de leurs côtés opposés proportionnelles** alors ils sont également **semblables**.

Exemple 1 :

Ces triangles ABC et DEF sont semblables. Donc les longueurs de leurs côtés homologues sont deux à deux proportionnelles :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{ED} = \frac{CB}{DF}.$$



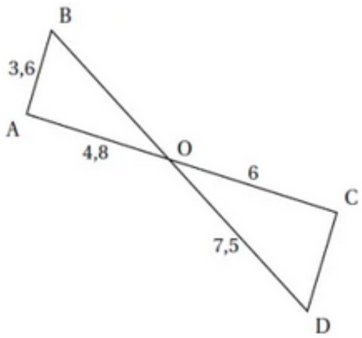
Remarque 1 :
Le théorème de Thalès est un cas particulier de deux triangles **semblables**

VI Exercices corrigés :

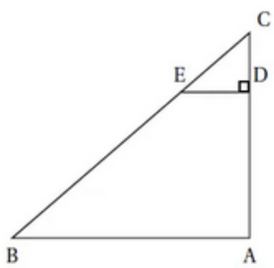
Exercice 1 : (correction en vidéo)

On considère la figure ci-contre où les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

1. Calculer la longueur BO
2. Calculer la longueur CD



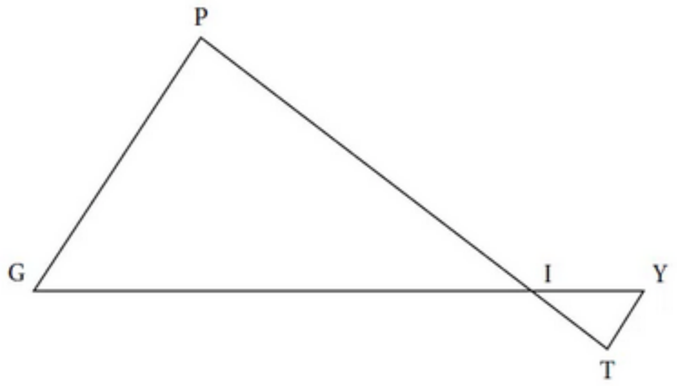
Exercice 2 : (correction en vidéo)



Les droites (AD) et (BE) se coupent en C et $(DE) \perp (CA)$.
On sait que :
$EC = 10$, $CB = 42$, $CA = 33{,}6$ et $ED = 6$,

1. Calculer la longueur CD
2. Démontrer que les droites (DE) et (AB) sont parallèles.
3. En déduire BA

Exercice 3 : (correction en vidéo)

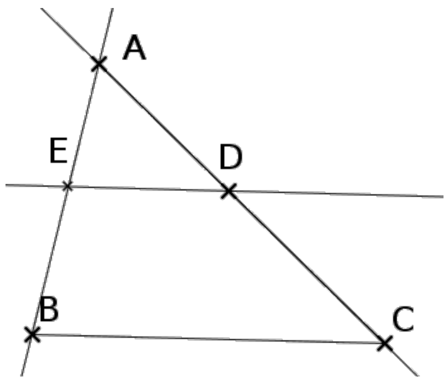


Les droites (TP) et (YG) sont sécantes en I.
On donne les longueurs :
IP = 4,5 cm; IG = 6cm; IY = 1,4 cm; YT = 0,8 cm et TI = 1 cm.

Les droites (PG) et (YT) sont-elles parallèles?

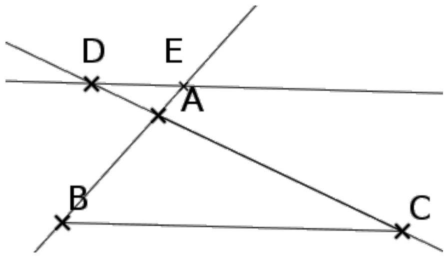
Exercice 4 :

Soit la configuration suivante.
On donne AD=3 cm, AC=5 cm, AE=4cm et BC=4cm.
Calculer AB et ED.



Exercice 5 :

Soit la configuration suivante :
On donne AD=4cm et AC=10cm, AE=2 cm, DE=3cm et BC=7cm.
Montrer que les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.



Exercice 6 :

Soit la figure suivante.
AH=4cm AC=5cm AE=6cm et AT=7,5cm.
Montrer que les droites (EH) et (TC) sont parallèles.