Suites arithmétiques et suites géométriques

issu d'un travail d'Arié Yallouz, avec son autorisation

I SUITES ARITHMÉTIQUES

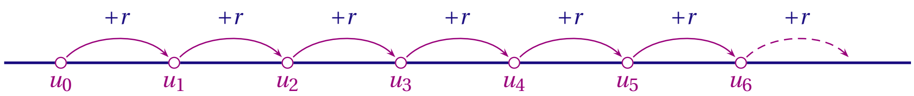
1 DÉFINITION (VIDÉO 1)

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé la raison de la suite arithmétique.

La raison d'une suite arithmétique est un réel indépendant de n.



Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

EXEMPLE

Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $r = -2$.

Calculer $v_1 = \ldots\ldots$; $v_2 = \ldots\ldots$; $v_3 = \ldots\ldots$ et $v_6 = \ldots\ldots$

CAS PARTICULIERS :

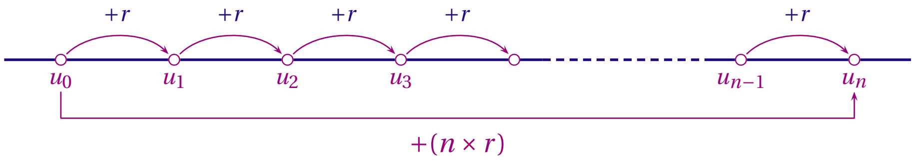
- La suite des nombres entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 est de raison 1.
- La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 est de raison 2.

2 RELATIONS ENTRE LES TERMES

FORMULE EXPLICITE (VIDÉO 2)

Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + nr$.

ILLUSTRATION



Démonstration fondamentale rédigée dans la vidéo 3

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r \\ u_2 &= u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r \\ u_3 &= u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r \end{aligned}$$

On admet que cette propriété s'étend de proche en proche à tout entier n :

$$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$$

Exemple

Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

Calculer $v_{50} = \ldots\ldots$;

Propriété

Si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

✳ DÉMONSTRATION

(u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n - u_p = (u_0 + nr) - \big(u_0 + pr\big) = (n-p)r$$

Remarque :

Si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et k, $u_{n+k} = u_n + kr$.
Il suffit de connaître la raison et un terme quelconque d'une suite arithmétique pour pouvoir déterminer tous les termes de la suite.

3 Variations (Vidéo 4)

Le sens de variation d'une suite arithmétique ne dépend que de sa raison.

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- La suite (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.
- La suite (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.
- La suite (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

✳ DÉMONSTRATION

(u_n) est une suite arithmétique de raison r donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$
- (u_n) est constante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0 \iff r = 0$.
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0 \iff r < 0$.

4 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

CAS PARTICULIER (VIDÉO 5 : DÉMONSTRATION FONDAMENTALE)

Pour tout entier naturel n on a :

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

❊ DÉMONSTRATION

On peut écrire la somme S des n premiers entiers naturels non nuls de deux manières :

$$S=1+2+\cdots+(n-1)+n$$
$$S=n+(n-1)+\cdots+2+1$$

Par addition des deux lignes on obtient :

$$2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n\text{ termes}}+(n+1)=n(n+1)$$

CAS GÉNÉRAL (VIDÉO 6)

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0,

$$u_0+u_1+\cdots+u_n=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$$

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$\text{nombre de termes}\times\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}$$

PREUVE

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

$$\begin{aligned}S&=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n\\&=u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\cdots+(u_0+nr)\\&=(n+1)u_0+(1+2+\cdots+n)\times r\\&=(n+1)u_0+\frac{n(n+1)}{2}\times r\\&=(n+1)\left(\frac{2u_0+nr}{2}\right)\\&=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)\end{aligned}$$

5 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE (VIDÉO 7)

REMARQUE

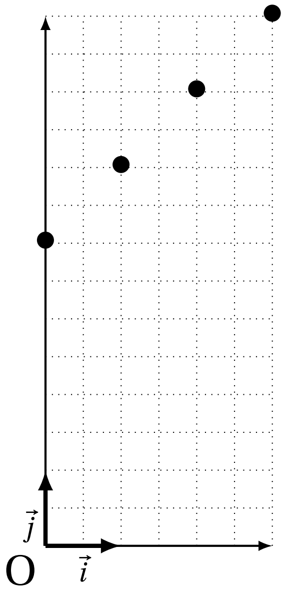
La forme explicite d'une suite arithmétique étant de la forme $u_n=f(n)$ où f est une fonction affine, les points formés par sa représentations graphiques sont alignés.

DÉFINITION :

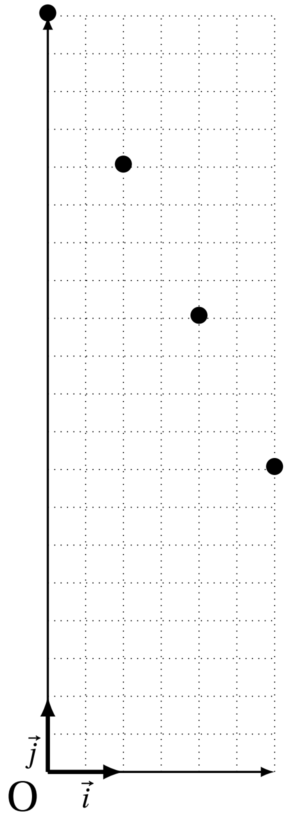
Dans le cas d'une suite arithmétique, on parle d'une évolution **linéaire**

APPLICATION :

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 1.



(v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 10$ et de raison -2.



II SUITES GÉOMÉTRIQUES

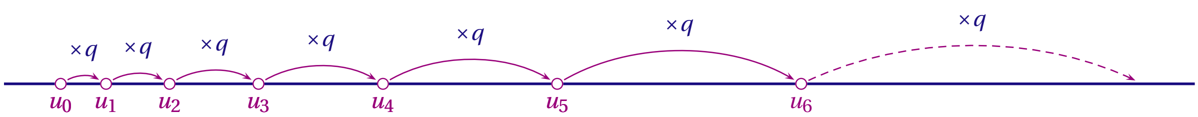
1 DÉFINITION (VIDÉO 8)

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

La raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de n.



Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

EXEMPLE :

Soit la suite géométrique (v_n), de premier terme $v_0 = 10$ et de raison 0,2.
Calculer $v_1 = \ldots\ldots$; $v_2 = \ldots\ldots$; $v_3 = \ldots\ldots$ et $v_6 = \ldots\ldots$

2 Évolution en pourcentage (Vidéo 9)

— Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1+\dfrac{t}{100}$.

— Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1-\dfrac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\dfrac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\dfrac{t}{100}$ (diminution)

Exemples

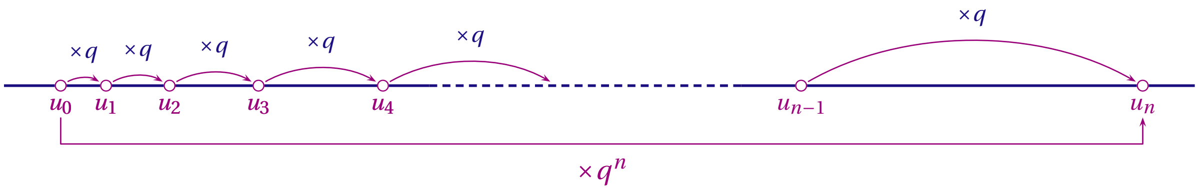
1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1 % par an.
   On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :
   $$C_{n+1} = C_n \times \left(1+\frac{1}{100}\right) = 1{,}01 \times C_n$$
   Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1{,}01$.
2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2016, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.
   On note r_n la quantité de rejets l'année $2016+n$ d'où :
   $$r_{n+1} = r_n \times \left(1-\frac{4}{100}\right) = 0{,}96 \times r_n$$
   Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

3 Relations entre les termes (Vidéo 10)

Expression explicite

Le terme général d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 \times q^n$.

Illustration



Démonstration fondamentale (Vidéo 11)

Quelques éléments de la démonstration mais la totalité du raisonnement est à voir en vidéo :

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 :

$$u_1 = u_0 \times q$$
$$u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2$$
$$u_3 = u_2 \times q = (u_0 + \times q^2) \times q = u_0 \times q^3$$

On admet que cette propriété s'étend de proche en proche à tout entier n :

$$u_n = u_{n-1} \times q = (u_0 \times q^{n-1}) \times q = u_0 \times q^n$$

Réciproquement, si la suite (u_n) est définie pour tout entier n par $u_n = a \times q^n$ où a et q sont des réels, alors pour tout entier n,

$$u_{n+1} = a \times q^{n+1} = a \times q^n \times q = u_n \times q$$

Application directe

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Déterminer u_{20}.

Si la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$
alors d'après le cours $u_n = u_0 \times q^n$. donc $u_{20} = u_0 \times 2^{20} = 3145728$.

Propriété

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

☼ DÉMONSTRATION

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times q^p \times q^{n-p} = u_p \times q^{n-p}$$

REMARQUE

Cette relation est utile lorsqu'une suite géométrique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on cherche la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes.

Exemple

(u_n) est une suite géométrique telle que $u_6 = 2$ et $u_9 = \frac{1}{4}$.
Pour déterminer la raison q de la suite (u_n) on utilise la relation :

$$u_9 = u_6 \times q^{9-6}$$

Soit q solution de l'équation

$$\frac{1}{4} = 2 \times q^3 \iff q^3 = \frac{1}{8} \iff q = \frac{1}{2}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

4 Sens de variations (Vidéo 12-13)

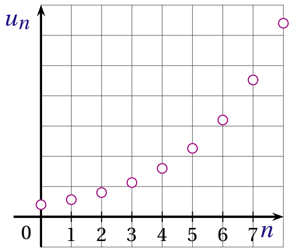
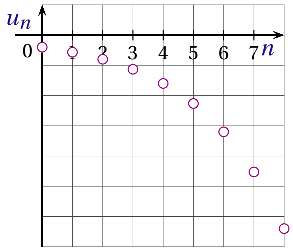
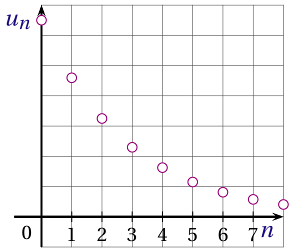
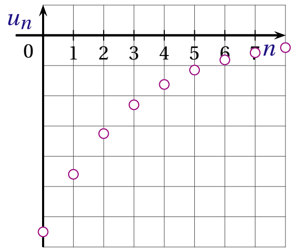
Étude des variations d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q-1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$

- Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

<table>
<tr><td colspan="2">Si $q > 1$</td><td colspan="2">Si $0 < q < 1$</td></tr>
<tr><td>Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante</td><td>Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante</td><td>Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante</td><td>Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.
- Si $q < 0$ alors la suite $\left(q^n\right)$ n'est pas monotone.
- Si $q > 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite $\left(q^n\right)$ est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul
- Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite $\left(q^n\right)$.
- Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite $\left(q^n\right)$.

5 RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME (VIDÉO 14)

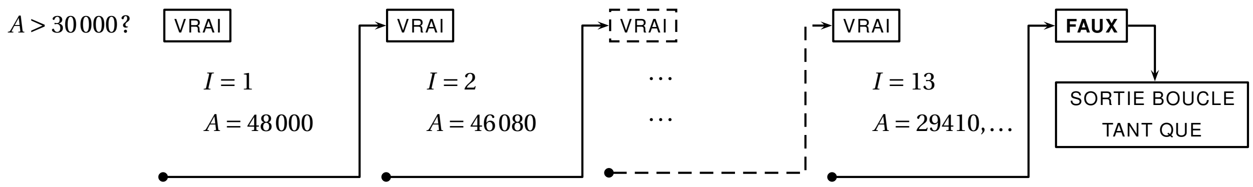
EXEMPLE 1

Soit (r_n) la suite géométrique de raison $q = 0{,}96$ et de premier terme $r_0 = 50\,000$
Comme $r_0 > 0$ et $0 < 0{,}96 < 1$ on en déduit, que la suite (r_n) est décroissante.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier I tel que pour tout entier $n \geqslant I$, $50\,000 \times 0{,}96^n < 30\,000$

$A \leftarrow 50\,000$
$I \leftarrow 0$
Tant que $A \geqslant 30\,000$
  $I \leftarrow I+1$
  $A \leftarrow 0{,}96 \times A$
Fin Tant que

PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
: 50000 → A	50000 → A ↲
: 0 → I	0 → I ↲
: While A ≥ 30000	While A ≥ 30000 ↲
: I + 1 → I	I + 1 → I ↲
: 0.96*A → A	0.96*A → A ↲
: End	WhileEnd ↲
: Disp I	I

Initialisation des variables A et I : $A = 50\,000$ et $I = 0$.
Traitement : Tant que la condition $A \geqslant 30000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "**TANT QUE**" et "**FIN TANT QUE**"



Sortie :
La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n \geqslant 13$, $50000 \times 0{,}96^n \leqslant 30000$.

EXEMPLE 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2\,000$
$1{,}015 > 1$ et $u_0 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.
L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur ou égal à 3 000.
C'est à dire déterminer le plus petit entier N tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $2\,000 \times 1{,}015^n \geqslant 3\,000$

$A \leftarrow 2\,000$
$N \leftarrow 0$
Tant que $A < 3\,000$
  $A \leftarrow 1{,}015 \times A$
  $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que

La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 28.
Donc pour tout entier $n \geqslant 28$, $u_n \geqslant 3\,000$. Soit pour tout entier $n \geqslant 28$, $2000 \times 1{,}015^n \geqslant 3\,000$.

6 Somme de termes consécutifs

SOMME DES PUISSANCES SUCCESSIVES (VIDÉO 15)

Soit $q \neq 1$ un réel et n un entier naturel. La somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

DÉMONSTRATION FONDAMENTALE (VIDÉO 16)

On pose $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, d'où $qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$
$S - qS = 1 - q^{n+1}$ soit $(1-q)\,S = 1 - q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, on en déduit que $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

REMARQUE
Si $q = 1$, $S = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$. S est la somme de $n+1$ termes égaux à 1 d'où $S = n+1$.

SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE (VIDÉO 17)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme } \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

DÉMONSTRATION FONDAMENTALE (VIDÉO 18)

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 donc

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) \\ &= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \end{aligned}$$

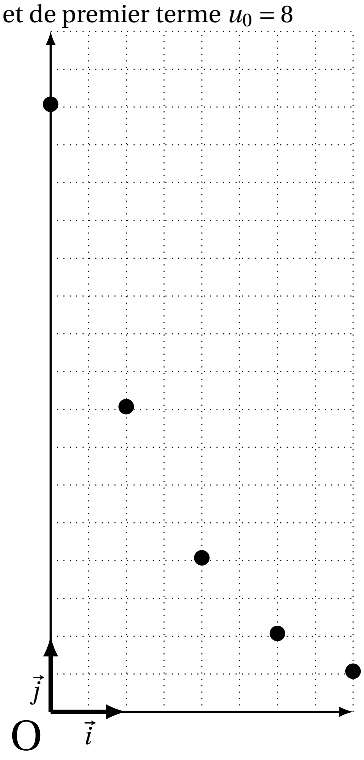
7 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE (VIDÉO 19)

DÉFINITION

Dans le cas d'une suite géométrique, on parle d'une croissance (ou décroissance) **exponentielle**.

APPLICATION :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 8$



Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$