ACTIVITÉ 1 : Variable aléatoire discrète : On lance un dé à 6 faces.

1. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire?
2. Considérons la variable aléatoire X qui prend la valeur 5, si le nombre sorti est 3 ou 6, et -3 dans le cas contraire.
   a) Combien de valeurs différentes prend X?
   b) Déterminer la loi de probabilité de X
   c) Déterminer l'espérance de X et conclure.

ACTIVITÉ 2 : Variable aléatoire continue :

On lance une flèche, au hasard, sur une cible circulaire D, , de diamètre 1 mètre et de centre O.
On peut considérer que l'univers Ω est l'ensemble des points de la cible, qui constituent chacun un événement élémentaire.
La flèche étant lancée au hasard, il est normal de définir la probabilité d'une partie A de Ω ainsi :

$$p(A) = \frac{Aire\ de\ A}{Aide\ de\ \Omega}$$

1. Calculer la probabilité de chacune des parties suivantes :
   a) A est le disque D
   b) A est le disque de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$
   c) A est un cercle de centre O inclus dans D
   d) A est une couronne délimitée par les cercles de centre O et de rayon a et b avec $0 < a < b < 1$.
2. Considérons la variable aléatoire X qui à chaque lancer, associe au point d'impact de la flèche, la distance au centre de la cible, en mètres.
   a) Quelles sont les valeurs prises par X?
   Quelle différence avec l'exercice précédent?
   b) Calculer $p(X < 1)$
   c) Calculer $p(X < \frac{1}{2})$
   d) Calculer $p(X = \frac{1}{2})$
   e) Calculer $p(X = k)$ pour tout réel $k \in [0;1]$.
   f) Si $0 < a < b < 1$, Calculer $p(a < X < b)$
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x$ sur $[0;1]$.
   a) Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et comparer à $p(X < 1)$
   b) Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et comparer à $p(X < \frac{1}{2})$
   c) Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et comparer à $p(X = \frac{1}{2})$
   d) Calculer, avec $0 < a < b < 1$,
   $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et comparer à $p(a < X < b)$.
   e) Quel est le lien entre la courbe représentative de f et $p(a < X < b)$?
   f) Représenter la fonction f sur $[0;1]$ et illustrer graphiquement $p(0{,}3 < X < 0{,}6)$.
4. **Bilan** :
   On a défini la loi de probabilité d'une variable aléatoire par une intégrale.
   Cette variable aléatoire prend une infinité de valeurs.
   La probabilité que X prenne une valeur précise est toujours nulle.
   On détermine la probabilité de X sur un intervalle, ce qui se représente par l'aire sous la courbe de f entre les droites 'équation $x = a$ et $x = b$.

> On dit que la variable X est **continue**, en opposition à une variable aléatoire **discrète**.
> On dit que f, qui définit la loi de probabilité de X par un calcul intégral est une **fonction de densité de probabilité** de X

1 LOI À DENSITÉ SUR UN INTERVALLE (VIDÉOS 1-2-3-4)

- **Application directe du cours :** Exercices 19 et 20; 25 et 28 p 230; 33 p 231

2 LOI UNIFORME (VIDÉO 5-6)

- **Application directe du cours :** Exercices 1 et 2 p 223;
- **Modélisation avec la loi uniforme :** Exercices 40; 41 et 42 p 231

EXERCICE 1 (Extrait Antilles 2018)
Anne prévoit d'appeler Benoît par téléphone à un moment choisi au hasard entre 8 h 30 et 10 h. Benoît sera dans un train à partir de 9 h pour un trajet de plusieurs heures.
Quelle est la probabilité qu'Anne appelle Benoît alors qu'il est dans le train?

a. $\dfrac{60}{150}$ **b.** $\dfrac{2}{3}$ **c.** $\dfrac{6}{13}$ **d.** $\dfrac{1}{3}$

EXERCICE 2 (Extrait Polynésie 2018)
Dire si cette affirmation suivante est vraie ou fausse. Une justification est attendue.
Dans un hôtel, le petit déjeuner n'est servi que jusqu'à 10 heures 15 minutes. Pierre, qui réside dans cet hôtel, se lève entre 9 heures et 11 heures.
On admet que l'heure de lever de Pierre est modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9\ ;\ 11]$. La probabilité que Pierre ne puisse pas prendre son petit déjeuner est 0,425.

EXERCICE 3 (Extrait Antilles 2017)
Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

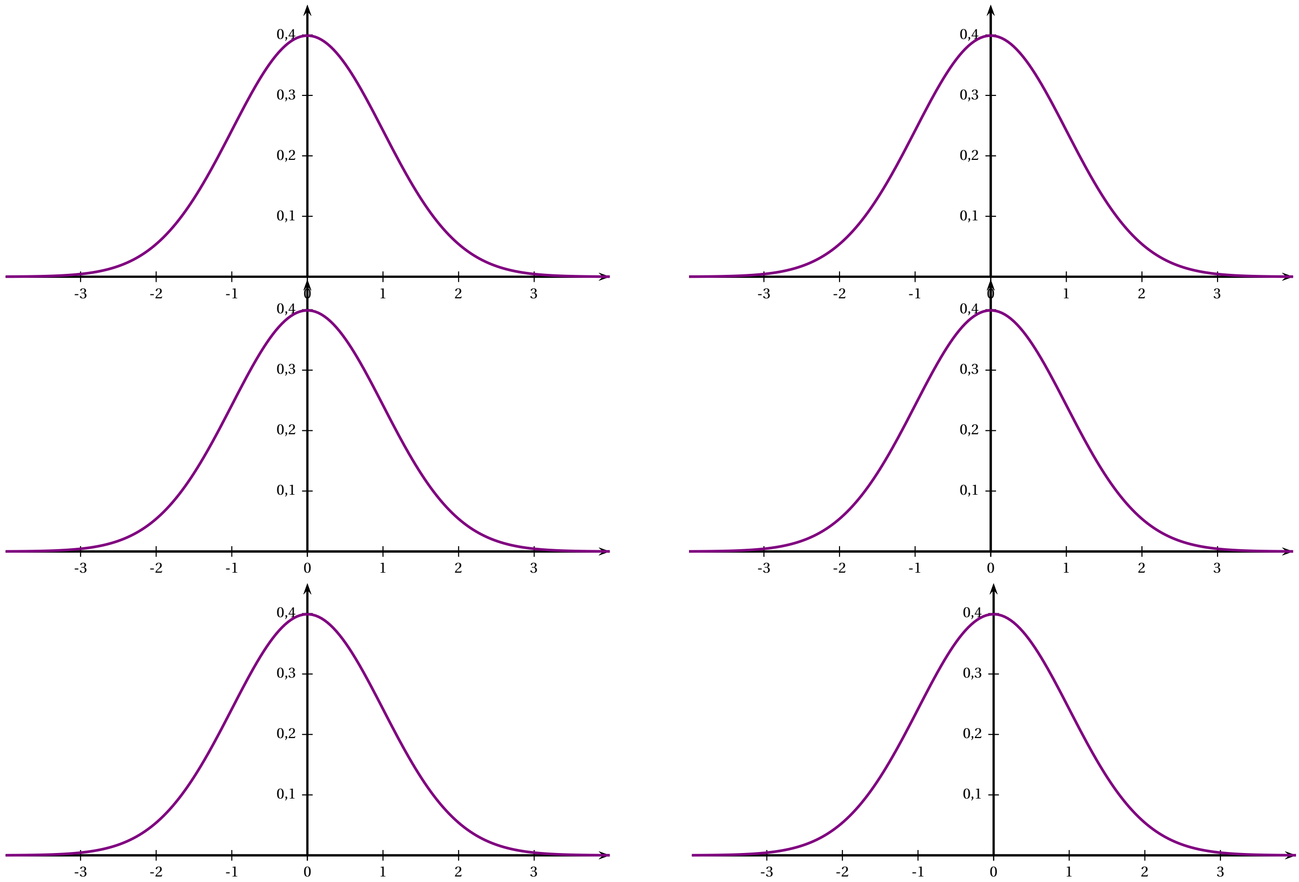
1. $E(X) = \dfrac{2}{5}$.
2. $p(X > 2) = \dfrac{3}{5}$.
3. $p(X \leqslant 2) = \dfrac{3}{5}$.
4. $p(X \leqslant 5) = 0$.

EXERCICE 4 (Extrait Métropole 2017)
Un supermarché dispose de plusieurs caisses. Un client qui se présente à une caisse doit attendre un certain temps T_1 avant d'être pris en charge par le caissier. On considère que ce temps d'attente T_1 exprimé en minute, est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 12]$.

1. Quelle est la probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes avant d'être pris en charge?
2. Quel est le temps moyen d'attente à une caisse?

3 LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE $\mathcal{N}(0;1)$

- **Propriétés graphiques de la loi Normale centrée :** Exercice 3-4 p 224;

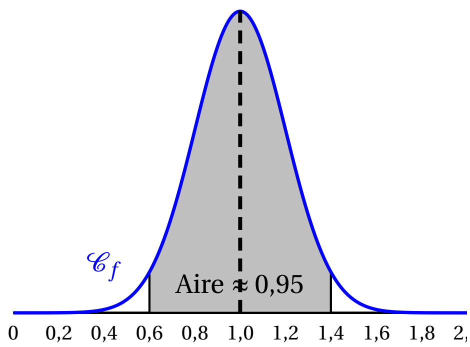


- **Application de cours avec la loi normale centrée :** Exercice 18 p 230

4 LOI NORMALE $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

- **Obtenir une probabilité - Utilisation de la calculatrice** : Exercice 3 p 224 ; 5 et 6 p 225
- **Application du cours : événements particuliers** : Exercice 7-8 p 226
- **Modélisation avec la loi normale :** : Exercices 40 ; 41 et 42 p 231

EXERCICE 5 (Extrait Liban 2017)
On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction de densité f associée à la variable X.

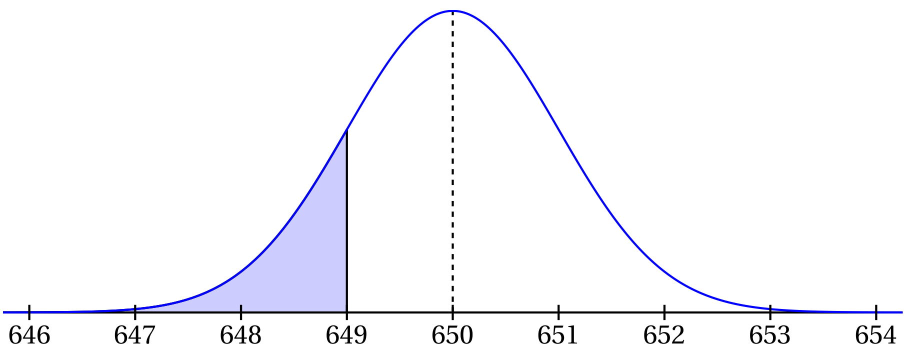


1. L'espérance de X est 0,4.
2. L'espérance de X est 0,95.
3. L'écart-type de X est environ 0,4.
4. L'écart-type de X est environ 0,2.

EXERCICE 6 (Extrait Liban 2018) Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale et telle que

$$P(X \leqslant 649) \approx 0{,}1587.$$

On note respectivement μ et σ l'espérance et l'écart-type de cette loi normale.



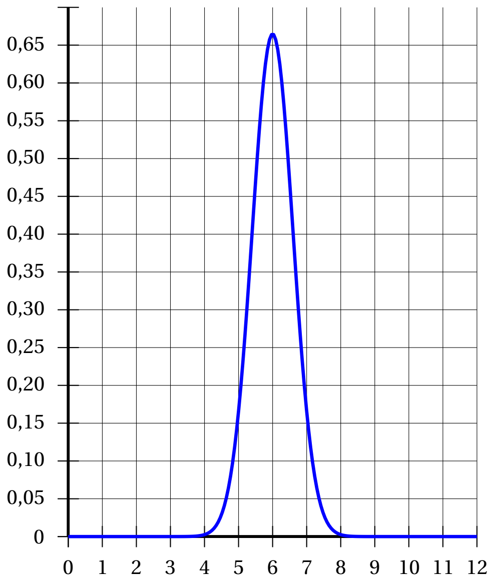
A. $P(X \leqslant 651) \approx 0{,}6587$	**B.** $P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0{,}683$
C. $\sigma = 650$	**D.** $\mu = 649$

EXERCICE 7(Extrait Antilles juin 2018)
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 25$ et $\sigma = 3$.
La meilleure valeur approchée du réel t tel que $P(X > t) = 0{,}025$ est :

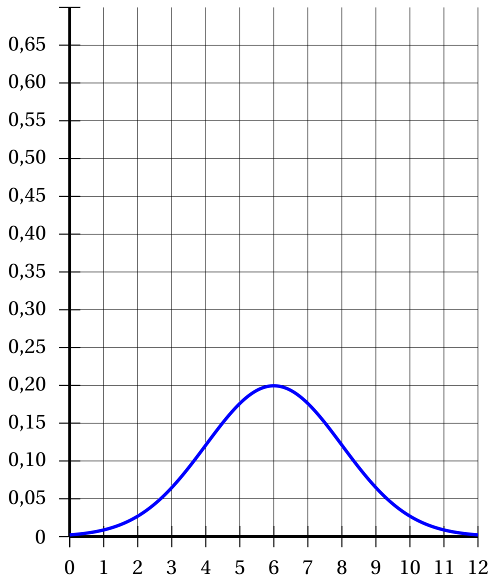
a. $t \approx 0{,}97$ **b.** $t \approx 19{,}12$ **c.** $t \approx 28$ **d.** $t \approx 30{,}88$

EXERCICE 8 (Extrait Antilles septembre 2017)
Le temps hebdomadaire d'entraînement des coureurs du parcours rouge, exprimé en heure, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale dont l'espérance est de 6 heures et l'écart type est de 2 heures.

1. Lequel des deux graphiques suivants, graphique 1 ou graphique 2, représente la fonction de densité de la loi normale de paramètres $\mu = 6$ et $\sigma = 2$? Justifier la réponse.



graphique 1



graphique 2

2. Un magazine spécialisé interroge au hasard quelques participants du parcours rouge afin de mener une enquête sur la durée de leur entraînement. On arrondira les résultats au millième.
   a) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est comprise entre 5 h et 7 h ?
   b) Quelle est la probabilité d'interroger un coureur dont la durée d'entraînement est inférieure à 4 h ?

EXERCICE 9 (Métropole-Réunion Juin 2018)
Le temps passé par un client, en minute, dans un supermarché peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 45$ et d'écart-type $\sigma = 12$.
Pour tout évènement E, on note $p(E)$ sa probabilité.

1. Déterminer, en justifiant :

a) $p(X = 10)$ b) $p(X \geqslant 45)$ c) $p(21 \leqslant X \leqslant 69)$ d) $p(21 \leqslant X \leqslant 45)$

2. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'un client passe entre 30 et 60 minutes dans ce supermarché.
3. Déterminer la valeur de a, arrondie à l'unité, telle que $P(X \leqslant a) = 0{,}30$. Interpréter la valeur de a dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 10 (Métropole 2017-2ème sujet)

1. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 3$ et d'écart type $\sigma = 1$ alors $P(X \leqslant 2{,}5)$ a pour valeur approchée arrondie au centième :

   a) 0,16 b) 0,26 c) 0,31 d) 0,54

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type σ. Si $P(-5 \leqslant Y \leqslant 5) \approx 0{,}95$ alors, parmi les réponses suivantes, la meilleure valeur approchée de σ est :

   a) 5 b) 2,5 c) 1,3 d) 0,95

EXERCICE 11 (Extrait Antilles 2017)
Une machine remplit des flacons dont le volume annoncé est de 100 mL. On admet que le volume contenu dans le flacon peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance 100 mL et d'écart type 2 mL.

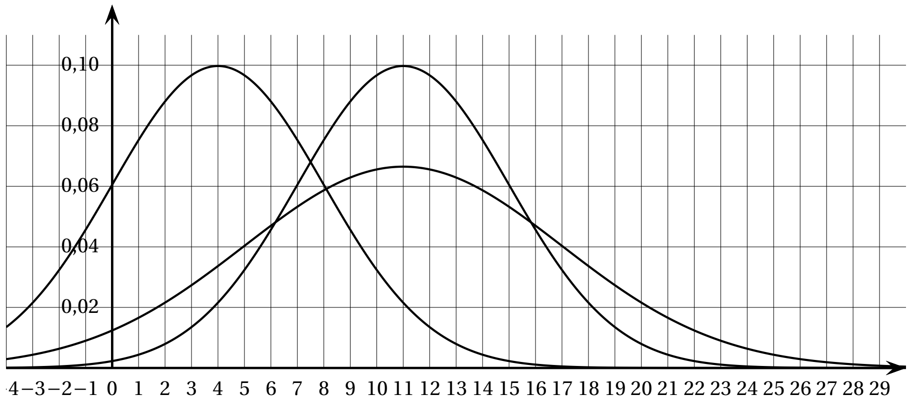
1. $p(Y \leqslant 100) = 0{,}45$.
2. $p(Y > 98) = 0{,}75$.
3. $p(96 \leqslant Y \leqslant 104) \approx 0{,}95$.
4. $p(Y \leqslant 110) \approx 0{,}85$.

EXERCICE 12 (Extrait Pondichéry 2017)
On suppose que le temps en minutes mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 39$.

1. Calculer $P(210 \leqslant T \leqslant 270)$.
2. Un coureur est choisi au hasard parmi les coureurs qui ont mis entre 210 minutes et 270 minutes pour finir le marathon.
   Calculer la probabilité que ce coureur ait terminé la course en moins de 240 minutes.
3. a) Calculer $P(T \leqslant 300)$.
   b) Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité, vérifiant $P(T \geqslant t) = 0{,}9$.
   c) Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 13 (Extrait Amérique du Nord 2017)
L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie cœliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.
On note X la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie cœliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.
On admet que la loi de X peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Calculer la probabilité que la maladie soit diagnostiquée entre 9 ans et 13 ans après les premiers symptômes. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
2. Calculer $p(X \leqslant 6)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Sachant que $p(X \leqslant a) = 0{,}84$, donner la valeur de a arrondie à l'unité.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Laquelle de ces trois courbes représente la fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 11$ et d'écart-type $\sigma = 4$? Justifier le choix. On pourra s'aider des réponses aux questions précédentes.



EXERCICE 14 (Métropole septembre 2018)

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si besoin, au millième.

Partie A

Une étude réalisée dans des écoles en France indique que 12,9 % des élèves sont gauchers. Parmi ces gauchers, on trouve 40 % de filles.

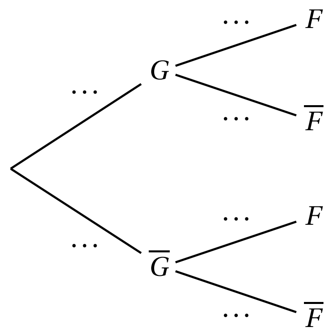
On choisit au hasard un élève et on considère les évènements suivants :

G : « l'élève est gaucher » et F : « l'élève est une fille ».

Pour tout évènement A, on note $p(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire. De plus, si B est un évènement de probabilité non nulle, on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. Recopier l'arbre pondéré ci-contre et traduire sur cet arbre les données de l'exercice.
2. Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit une fille gauchère ?
3. Dans ces écoles, il y a 51 % de filles.

   Montrer que $p\left(\overline{G} \cap F\right) = 0{,}4584$.
4. Sachant que l'on est en présence d'une élève fille, quelle est la probabilité qu'elle soit droitière ?



Partie B

Le temps de réaction en milliseconde chez les escrimeurs gauchers est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 268$ et d'écart type $\sigma_1 = 20$.

Le temps de réaction en milliseconde chez les escrimeurs droitiers est modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 280$ et d'écart type $\sigma_2 = 22$.

1. a) Déterminer $P(X \leqslant 300)$ et $P(Y \leqslant 300)$.

   b) Interpréter ces résultats dans le contexte de l'exercice.
2. Sur le graphique ci-dessous, les courbes C et C' représentent les fonctions de densité des variables aléatoires X et Y.

   Indiquer, pour chaque variable aléatoire X et Y, la courbe correspondante. Justifier.