

# Produit scalaire

## I RAPPELS DES FONDAMENTAUX DE SECONDES SUR LES VECTEURS ET LA GÉOMÉTRIE REPÉRÉE :

### CE QU'IL FAUT CONNAÎTRE :

Dans un repère quelconque :

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ , les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  vérifient :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ , les coordonnées du milieu  $I$  de  $[AB]$  vérifient :

$$I \left( \frac{x_B + x_A}{2} ; \frac{y_B + y_A}{2} \right)$$

On appelle déterminant de deux vecteurs  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$ , le nombre :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si, leur déterminant est nul

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et la distance entre les points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  vérifient :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

## II GÉOMÉTRIE NON REPÉRÉE

Dans cette section, nous nous placerons dans un plan euclidien.

### 1 DÉFINITIONS DU PRODUIT SCALAIRE

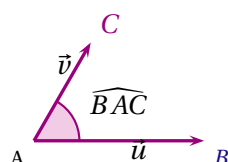
#### ANGLE DE DEUX VECTEURS (VIDÉO 1)

##### Définition :

Soit deux vecteurs, non nuls,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On note  $(\vec{u}; \vec{v})$ , l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  où  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$

##### EXEMPLE :



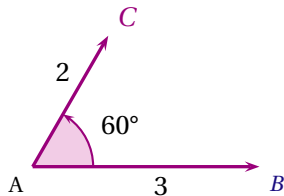
On a l'égalité :

.....

**DÉFINITION 1 :****Produit scalaire et norme :**

On appelle produit scalaire de deux vecteurs, non nuls,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

**EXEMPLE****DÉFINITION 2 : (VIDÉO 2)****Produit scalaire et projeté orthogonal :**

Soit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , non nuls .

Soit  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

On a alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

**DÉFINITION 3 :****Calcul du produit scalaire avec le projeté orthogonal :**

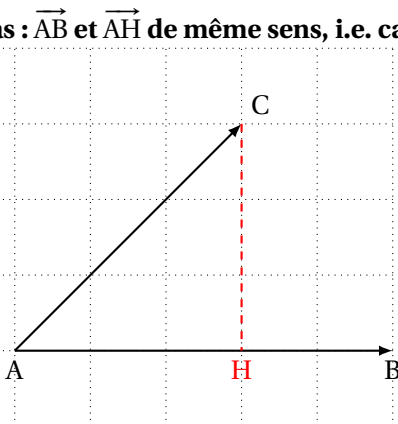
Soient  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  deux vecteurs du plan.

Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

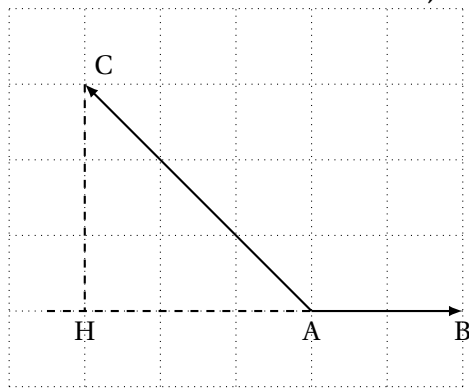
Le produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  est défini par :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$  si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$  si les deux vecteurs forment un angle obtus.

**1<sup>er</sup> cas :  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  de même sens, i.e. cas où l'angle est aigu :**



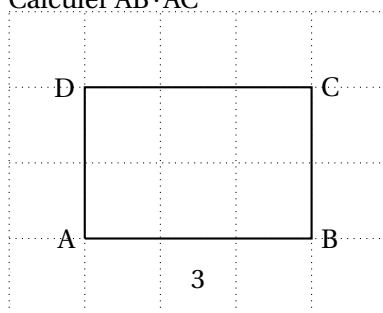
2° cas :  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  de sens contraire , i.e. Cas où l'angle est obtus :



**EXEMPLE :**

Soit ABCD un rectangle tel que  $AB = 3$ .  
Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

**Correction :**



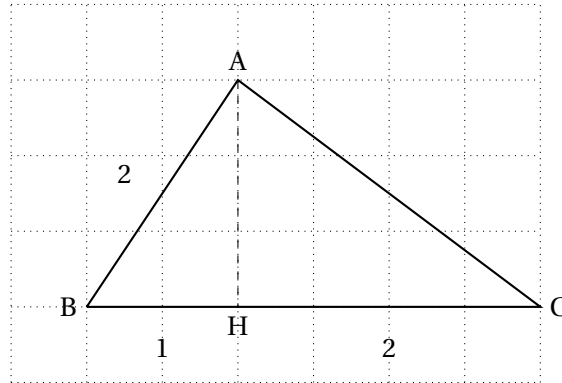
**REMARQUE**

N'essayez pas d'interpréter le produit scalaire de façon géométrique car dans un cas général, le produit scalaire n'a aucune signification géométrique particulière.  
Ce pendant, il existe un cas où le produit scalaire a une signification géométrique; c'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

**APPLICATIONS : (VIDÉO 3)**

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, qui n'est pas réalisée à l'échelle, calculer les produits scalaires suivants :

1.  $(\vec{AB} + \vec{AH}) \cdot \vec{AB}$
2.  $(\vec{AH} + \vec{HC}) \cdot \vec{AB}$



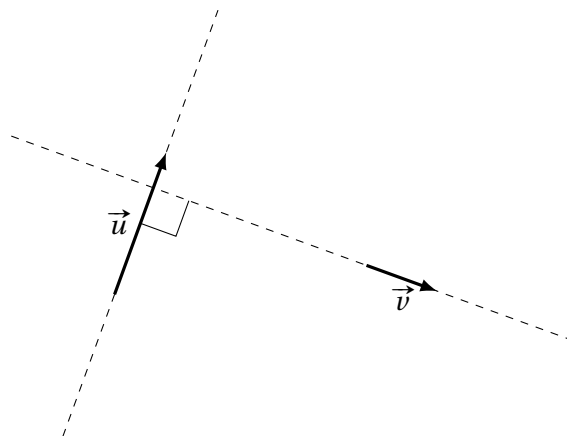
**Correction :**

**2 ORTHOGONALITÉ DE DEUX VECTEURS****VECTEURS ORTHOGONAUX (VIDÉO 4)****Définition :**

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur support (les droites ayant la même direction) forment un angle droit.

**EXEMPLE :**

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  suivants sont orthogonaux :



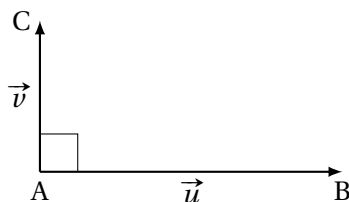
**PROPRIÉTÉ**

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux  $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

**DÉMONSTRATION**

- Supposons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  orthogonaux.

Par définition, si on note H le projeté orthogonal de C sur (AB), on a :



$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= AB \times AH \\ &= AB \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

- Supposons que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , avec  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

Notons  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$ , puis H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Alors,  $AB \times AH = 0$ . Comme  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $AB \neq 0$ , ce qui signifie donc que  $AH = 0$ .

Or,  $H \in (AB)$  par construction, donc H est confondu avec A.

H étant le projeté orthogonal de C sur (AB), cela signifie que (AC) est perpendiculaire à (AB), c'est-à-dire que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

Ainsi, si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

On déduit de cela l'équivalence.

**3 PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DU PRODUIT SCALAIRE (VIDÉO 5)**

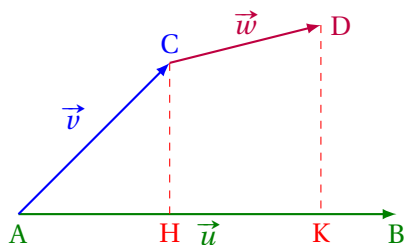
**DISTRIBUTIVITÉ**

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan. Alors,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

**DÉMONSTRATION**

Considérons les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  comme sur le schéma ci-dessous.  
 On ne considérera que le cas où les produits scalaires rencontrés sont positifs (car le cas où ils sont négatifs est similaire).



D'une part, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{AB} \cdot (\vec{AC} + \vec{CD}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{AD} \\ &= AB \times AK. \end{aligned} \quad (1)$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= AB \times AH \\ \text{et} \\ \vec{u} \cdot \vec{w} &= \vec{AB} \cdot \vec{CD} \\ &= AB \times HK \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= AB \times AH + AB \times HK \\ &= AB \times (AH + HK) \\ &= AB \times AK. \end{aligned} \quad (2)$$

Des égalités (1) et (2), on peut déduire :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Quels que soient les points  $A, B, C$  et  $D$  du plan :

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{CD} &= \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}. \end{aligned}$$

**SYMÉTRIE (COMMUTATIVITÉ)**

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

**DÉMONSTRATION**

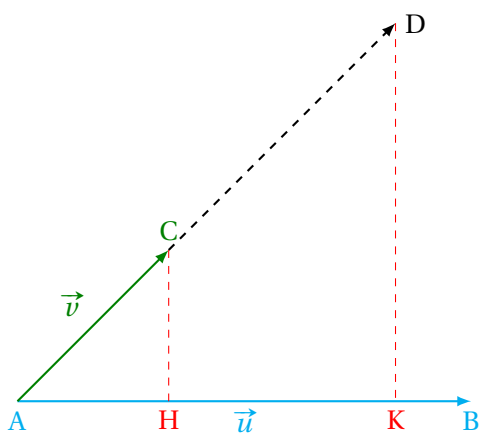
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos[-(\vec{v}, \vec{u})] \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

car la fonction  $x \mapsto \cos x$  est paire  
 car pour  $a$  et  $b$  réels,  $a \times b = b \times a$

**BILINÉARITÉ**

Soit  $k \in \mathbb{R}^*$ , et soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs quelconques. Alors,

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$



Notons  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ .

D'après le théorème de Thalès :

$$AD = kAC \implies AK = kAH$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (k\vec{v}) &= AB \times AK &= AB \times kAH \\ &= kAB \times AH \end{aligned}$$

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = kAB \times AH.$$

Donc,  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

Un raisonnement analogue montrerait que :

$$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

**IDENTITÉS AVEC LES NORMES**

Pour tous  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan :

1.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ .
2.  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**DÉMONSTRATION :**

1.  $\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\|^2. \end{aligned}$
2.  $\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$

**4 PROPRIÉTÉS COMPLÉMENTAIRES (VIDÉO 6)**

Pour tous  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

**Démonstration :**

- Nous avons vu précédemment que :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

En isolant  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , on arrive à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

- En exploitant l'égalité :

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2,$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2,$$

on arrive à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

- En ajoutant les deux précédentes égalités, on a :

$$\begin{aligned} 2\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2). \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

**III GÉOMÉTRIE REPÉRÉE**

Dans cette section, on rapporte le plan euclidien à un repère orthonormé.

**1 CALCUL DU PRODUIT SCALAIRE AVEC LES COORDONNÉES (VIDÉO 7)****ÉGALITÉ DU PRODUIT SCALAIRE**

Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$



**DÉMONSTRATION**

D'après la propriété ??,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).$$

On sait que :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

et

$$\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$$

car on est dans un repère orthonormé.

De plus,

$$(\vec{u} - \vec{v}) \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \\ &= x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x'^2 + 2xx' - x^2 - y'^2 + 2yy' - y^2) \\ &= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') \\ &= xx' + yy'. \end{aligned}$$

**APPLICATION :**

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$  deux vecteurs d'un repère orthonormé . Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**Correction :**

**2 APPLICATION POUR TROUVER LA MESURE D'UN ANGLE : (VIDÉO 8)****EXEMPLE**

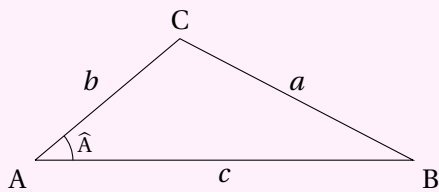
Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$  deux vecteurs d'un repère orthonormé .

Déterminer une mesure approchée de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$

#### IV APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

##### 1 FORMULE D'AL-KASHI : (VIDÉO 9)

**Généralisation du théorème de Pythagore :**



Soit ABC un triangle quelconque.

En notant :  $a = BC$  ,  $b = AC$  ,  $c = AB$  ,  $\hat{A} = \widehat{BAC}$ ,  
on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$

**Démonstration fondamentale :**

## 2 LIGNE DE NIVEAU

**Propriété :**(Vidéo 10)

Pour tous points  $A$ ,  $B$  et  $M$  du plan,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

où  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

**Démonstration :**

**Propriété :**(Vidéo 11)

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan.

L'ensemble des points  $M$  du plan qui vérifient l'égalité  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  est le cercle de diamètre  $[AB]$ .

**Démonstration :**

### 3 ÉQUATION CARTÉSIENNE DE CERCLES : (VIDÉO 12)

Soit  $I(a; b)$  un point du plan rapporté au repère orthonormé .

Une équation du cercle de centre  $I$  et de rayon  $r$  est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

**Démonstration :**

#### 4 VECTEUR NORMAL D'UNE DROITE

**Définition :**

Dans un repère orthonormé, on considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ .

On appelle **vecteur normal** à  $\mathcal{D}$  tout vecteur orthogonal au vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ .

**Propriété :**

Dans un repère orthonormé, on considère la droite  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ .

Alors  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}$ .