Produit scalaire

I Rappels des fondamentaux de secondes sur les vecteurs et la géométrie repérée :

Ce qu'il faut connaître :

Dans un repère quelconque :

Soient A$(x_A; y_A)$ et B$(x_B; y_B)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vérifient :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Soient A$(x_A; y_A)$ et B$(x_B; y_B)$, les coordonnées du milieu I de [AB] vérifient :

$$I\left(\frac{x_B + x_A}{2} \quad ; \quad \frac{y_B + y_A}{2}\right)$$

On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$, le nombre :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si, leur déterminant est nul

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires } \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0$$

Dans un repère orthonormé, la norme d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et la distance entre les points A$(x_A; y_A)$ et B$(x_B; y_B)$ vérifient :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

II Géométrie non repérée

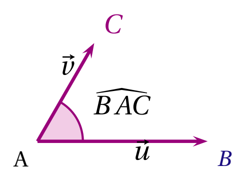
Dans cette section, nous nous placerons dans un plan euclidien.

1 Définitions du produit scalaire

Angle de deux vecteurs (Vidéo 1)

Définition :
Soit deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note $\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$, l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Exemple :



On a l'égalité :

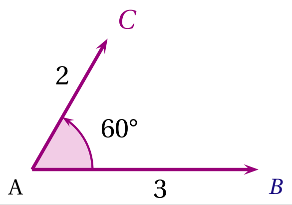
$$\widehat{BAC} = \left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)$$

DÉFINITION 1 :

Produit scalaire et norme :
On appelle produit scalaire de deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

EXEMPLE



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos 60^\circ\\ &= AB \times AC \cos 60^\circ\\ &= 3\times 2\times\frac{1}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

DÉFINITION 2 : (VIDÉO 2)

Produit scalaire et projeté orthogonal :
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls .
Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB).
On a alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$$

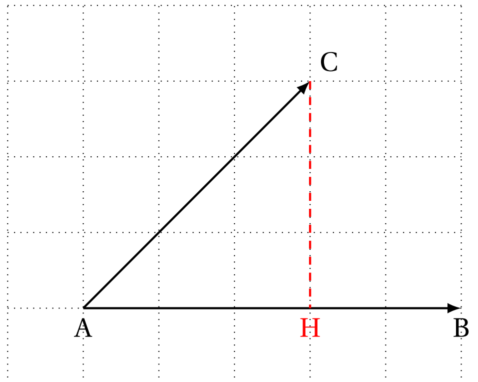
DÉFINITION 3 :

Calcul du produit scalaire avec le projeté orthogonal :
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est défini par :

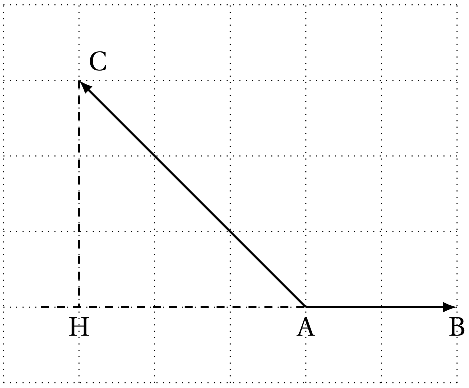
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

1er cas : $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AH}$ de même sens, i.e. cas où l'angle est aigu :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\\ &= AB \times AH\\ & 5\times 3\\ &= 15\end{aligned}$$

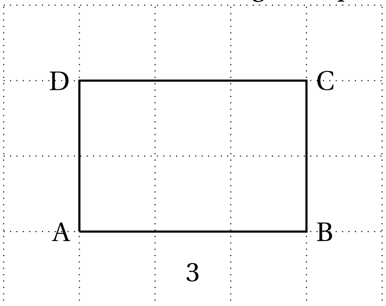
2e cas : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ de sens contraire , i.e. Cas où l'angle est obtus :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}\\ &= -AB\times AH\\ &= 2\times(-3)\\ &= -6\end{aligned}$$

Exemple :

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 3$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$



Correction :
Le point C se projette orthogonalement en B noté $C \xrightarrow{\perp} B$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = 9$

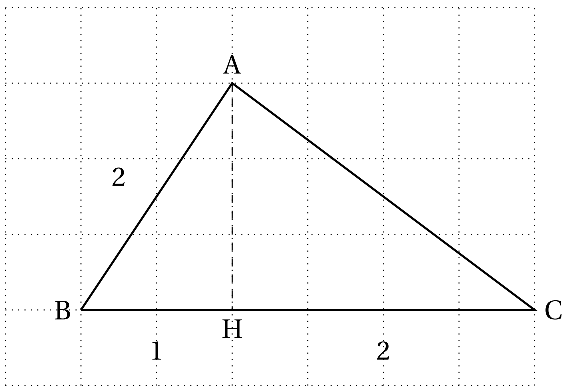
Remarque

N'essayez pas d'interpréter le produit scalaire de façon géométrique car dans un cas général, le produit scalaire n'a aucune signification géométrique particulière.
Ce pendant, il existe un cas où le produit scalaire a une signification géométrique; c'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

Applications : (Vidéo 3)

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, qui n'est pas réalisée à l'échelle, calculer les produits scalaires suivants :

1. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$
2. $\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$



Correction :

1.

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AB} &= AB^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} \quad (B \xrightarrow{\perp} H)\\
&= AB^2+AH^2\\
&= AB^2+\left(AB^2-BH^2\right) \quad \text{th de Pythagore}\\
&= 2AB^2-BH^2\\
&= 2\times 4-1=7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB} \quad (B \xrightarrow{\perp} H)\\
&= AH^2+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HB}\\
&= \left(AB^2-BH^2\right)-HC\times HB \quad \text{th de Pythagore et colinéarité}\\
&= 4-1-2\times 1=1
\end{aligned}$$

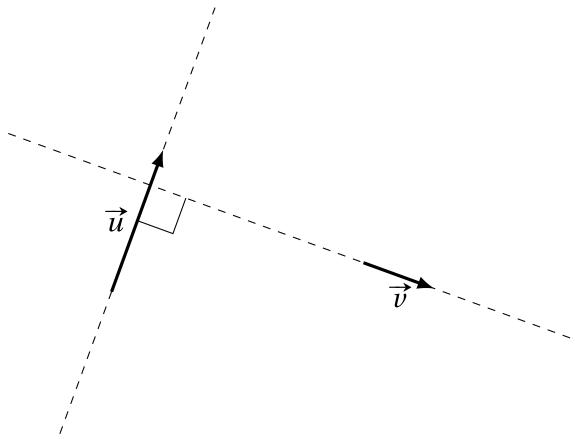
2 Orthogonalité de deux vecteurs

vecteurs orthogonaux (Vidéo 4)

Définition :
Deux vecteurs sont orthogonaux si leur support (les droites ayant la même direction) forment un angle droit.

EXEMPLE :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont orthogonaux :

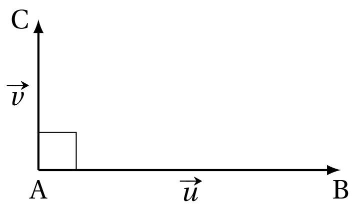


PROPRIÉTÉ

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

DÉMONSTRATION

- Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.



Par définition, si on note H le projeté orthogonal de C sur (AB), on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AH}\\ &= \mathrm{AB}\times 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

- Supposons que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
  Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis H le projeté orthogonal de C sur (AB).
  Alors, $AB \times AH = 0$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, $AB \neq 0$, ce qui signifie donc que $AH = 0$.
  Or, $H \in (AB)$ par construction, donc H est confondu avec A.
  H étant le projeté orthogonal de C sur (AB), cela signifie que (AC) est perpendiculaire à (AB), c'est-à-dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

  Ainsi, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

On déduit de cela l'équivalence.

3 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DU PRODUIT SCALAIRE (VIDÉO 5)

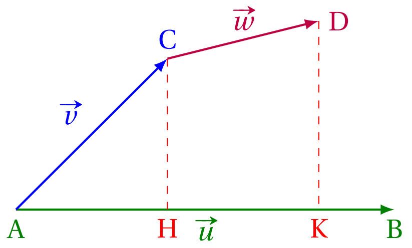
DISTRIBUTIVITÉ

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Alors,

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$

DÉMONSTRATION

Considérons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme sur le schéma ci-dessous.
On ne considérera que le cas où les produits scalaires rencontrés sont positifs (car le cas où ils sont négatifs est similaire).



D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\\ &= AB\times AK\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= AB\times AH\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{w} &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\ &= AB\times HK\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} &= AB\times AH+AB\times HK\\ &= AB\times(AH+HK)\\ &= AB\times AK\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

Des égalités (1) et (2), on peut déduire :

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\,.$$

Quels que soient les points A, B, C et D du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

SYMÉTRIE (COMMUTATIVITÉ)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$

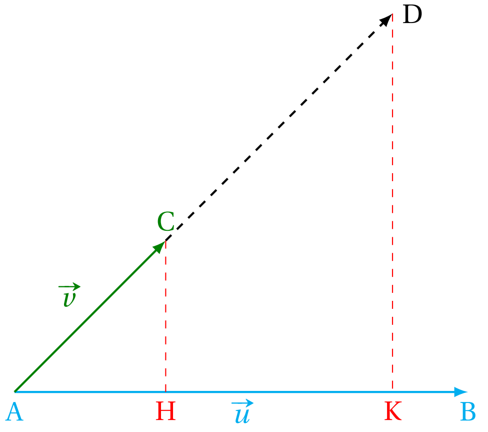
DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\ &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left[-\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right]\\ &= \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{v},\vec{u}\right) && \text{car la fonction } x\mapsto\cos x \text{ est paire}\\ &= \|\vec{v}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos\left(\vec{v},\vec{u}\right) && \text{car pour } a \text{ et } b \text{ réels, } a\times b=b\times a\\ &= \vec{v}\cdot\vec{u}\,.\end{aligned}$$

Bilinéarité

Soit $k \in \mathbb{R}*$, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$



Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
D'après le théorème de Thalès :
$AD = kAC \Longrightarrow AK = kAH$
Donc :

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = AB \times AK = AB \times kAH$$
$$= kAB \times AH$$

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = kAB \times AH.$$

Donc, $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
Un raisonnement analogue montrerait que :

$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Identités avec les normes

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
2. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Démonstration :

1. $$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\|^2. \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 \\ &= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \end{aligned}$$

4 Propriétés complémentaires (Vidéo 6)

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).$$

Démonstration :

- Nous avons vu précédemment que :
$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\,,$$
que l'on peut aussi écrire :
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\,.$$
En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$, on arrive à :
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)}\,.$$
- En exploitant l'égalité :
$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\,,$$
que l'on peut aussi écrire :
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2\,,$$
on arrive à :
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}\,.$$
- En ajoutant les deux précédentes égalités, on a :
$$\begin{aligned}2\vec{u}\cdot\vec{v}&=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\,.\end{aligned}$$
D'où :
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)}\,.$$

III Géométrie repérée

Dans cette section, on rapporte le plan euclidien à un repère orthonormé.

1 Calcul du produit scalaire avec les coordonnées (Vidéo 7)

Égalité du produit scalaire

Dans un repère orthonormé , on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

Alors,
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'\,.$$

Démonstration

D'après la propriété **??**,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

On sait que :

$$\|\vec{u}\|^2=x^2+y^2$$

et

$$\|\vec{v}\|^2=x'^2+y'^2$$

car on est dans un repère orthonormé.
De plus,

$$(\vec{u}-\vec{v})\begin{pmatrix}x'-x\\ y'-y\end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2&=\left(x'-x\right)^2+\left(y'-y\right)^2\\&=x'^2-2xx'+x^2+y'^2-2yy'+y^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+x'^2+y'^2-x'^2+2xx'-x^2-y'^2+2yy'-y^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right)\\&=xx'+yy'.\end{aligned}$$

Application :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé . Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
Correction :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=5\times1+(-2)\times7\\&=5-14\\&=-9.\end{aligned}$$

2 Application pour trouver la mesure d'un angle : (Vidéo 8)

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé .
Déterminer une mesure approchée de l'angle $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

Nous avons vu que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -9.$$

Or,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\\ &= \sqrt{5^2+(-2)^2} \times \sqrt{1^2+7^2} \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\\ &= \sqrt{29} \times \sqrt{50} \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)\\ &= 5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$-9 = 5\sqrt{58}\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right),$$

soit :

$$\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = -\frac{9}{5\sqrt{58}} \approx -0{,}236351579148\,.$$

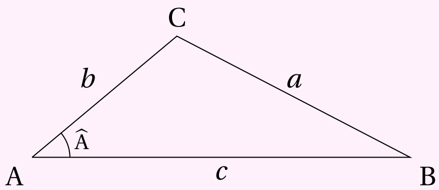
On en déduit alors :

$$\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \approx 104°.$$

IV Applications du produit scalaire

1 Formule d'Al-Kashi : (Vidéo 9)

Généralisation du théorème de Pythagore :



Soit ABC un triangle quelconque.
En notant : $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$, $c = \mathrm{AB}$, $\widehat{\mathrm{A}} = ABAC$,
on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}\,.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}^2 &= \left(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2\\ &= \overrightarrow{\mathrm{BA}}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}^2\\ &= \mathrm{BA}^2 + 2\mathrm{BA} \times \mathrm{AC} \times \cos BAAC + \mathrm{AC}^2\\ &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 + 2\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \left(-\cos ABAC\right)\\ &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos ABAC\,.\end{aligned}$$

2 LIGNE DE NIVEAU

Propriété :(Vidéo 10)

Pour tous points A, B et M du plan,

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$$

où I est le milieu de $[AB]$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}&=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\&=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\&=MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)}_{=\vec{0}}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\&=MI^2+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\&=MI^2+\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\&=MI^2-\frac{1}{4}AB^2.\end{aligned}$$

Propriété :(Vidéo 11)

Soient A et B deux points du plan.
L'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration :
Soit I le milieu de $[AB]$
D'après la propriété **??**, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0&\iff MI^2-\frac{1}{4}AB^2=0\\&\iff MI^2=\frac{1}{4}AB^2\\&\iff MI=\frac{1}{2}AB\\&\iff M\text{ appartient au cercle de centre }I\text{ et de rayon }\frac{AB}{2}\\&\iff M\text{ appartient au cercle de diamètre }[AB].\end{aligned}$$

3 ÉQUATION CARTÉSIENNE DE CERCLES : (VIDÉO 12)

Soit $I(a;b)$ un point du plan rapporté au repère orthonormé .
Une équation du cercle de centre I et de rayon r est :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Démonstration :
Dans un repère , considérons deux points $A(x_A y_B)$ et $B(x_B y_B)$. Posons $I(a;b)$ le milieu de $[AB]$.
Soit $M(x;y)$ un point du cercle de diamètre $[AB]$.
D'après la propriété de cours $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$.
De plus, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 &\iff \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_B\\y-y_B\end{pmatrix}=0\\
&\iff (x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0\\
&\iff x^2-(x_A+x_B)x+x_Ax_B+y^2-(y_A+y_B)y+y_Ay_B=0\\
&\iff x^2-2\times\frac{x_A+x_B}{2}x+x_Ax_B+y^2-2\times\frac{y_A+y_B}{2}+y_Ay_B=0.
\end{aligned}$$

Or,

$$x^2-2\times\frac{x_A+x_B}{2}x=\left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2-\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2=(x-a)^2-a^2$$

et

$$y^2-2\times\frac{y_A+y_B}{2}y=\left(y-\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2=(y-b)^2-b^2$$

donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 &\iff (x-a)^2-a^2+x_Ax_B+(y-b)^2-b^2+y_Ay_B=0\\
&\iff (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-x_Ax_B-y_Ay_B.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
a^2+b^2-x_Ax_B-y_Ay_B &= \left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2+\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2-x_Ax_B-y_Ay_B\\
&=\frac{x_A^2+2x_Ax_B+x_B^2}{4}+\frac{y_A^2+2y_Ay_B+y_B^2}{4}-\frac{4x_Ax_B}{4}-\frac{4y_Ay_B}{4}\\
&=\frac{x_A^2-2x_Ax_B+x_B^2+y_A^2-2y_Ay_B+y_B^2}{4}\\
&=\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}\\
&=\frac{AB^2}{4}.
\end{aligned}$$

En convenant de noter $r=\dfrac{AB}{2}$ le rayon du cercle (de diamètre $[AB]$), on obtient ainsi :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \iff (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

4 Vecteur normal d'une droite

Définition :
Dans un repère orthonormé , on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

On appelle **vecteur normal** à $\mathscr{D}$ tout vecteur orthogonal au vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Propriété :
Dans un repère orthonormé , on considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{D}$.

La droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. En posant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -b \times a + a \times b = 0.$$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. $\vec{n}$ est donc bien un vecteur normal à $\mathscr{D}$.