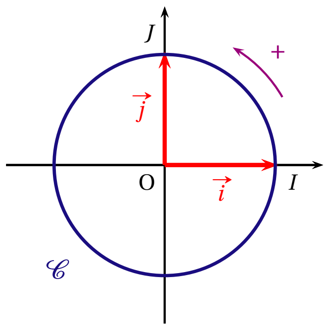
I REPÉRAGE SUR UN CERCLE (VIDÉO 1)

1 CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
Le cercle trigonométrique est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O, de rayon 1 orienté dans le sens direct.

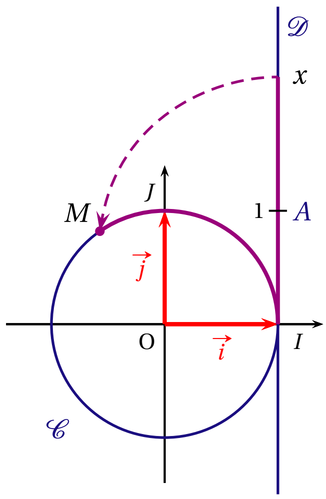


2 ENROULEMENT DE LA DROITE RÉELLE SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
La droite $\mathscr{D}$ est tangente en I au cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
A est le point de coordonnées $(1;1)$. La droite $\mathscr{D}$ est munie du repère $(I;A)$.
Par enroulement de la droite réelle $\mathscr{D}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$:

— à tout point de la droite d'abscisse x on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique, image du réel x;

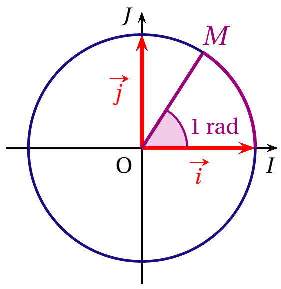
— tout point M du cercle trigonométrique est l'image d'une infinité de réels. Si le point M est associé à un réel x, alors il est associé à tout réel de la forme $x + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.



3 MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

DÉFINITION

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, de rayon 1.
Un radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte le cercle $\mathscr{C}$ suivant un arc de longueur 1.



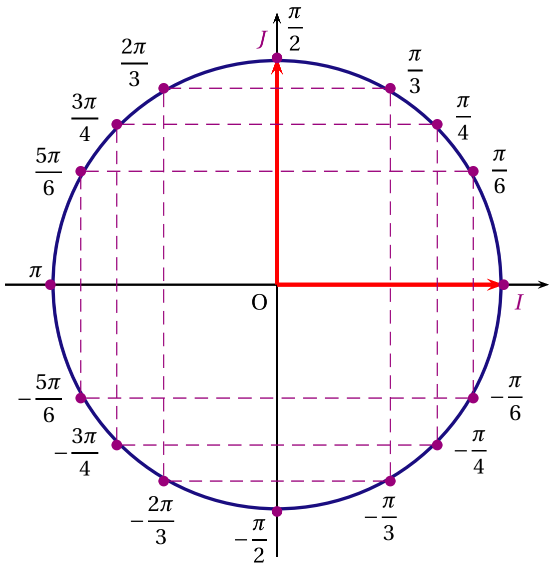
REMARQUE :

Les mesures en radians et en degrés d'un angle géométrique sont proportionnelles :

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

 Extrait d'un document d'Arié Yallouz, avec son aimable autorisation

VALEURS REMARQUABLES



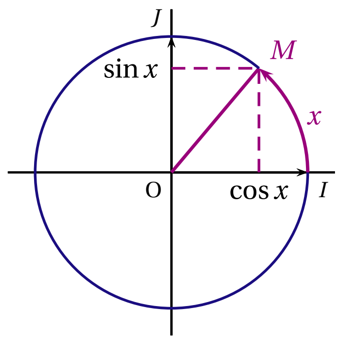
II COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE RÉEL (VIDÉO 2)

1 DÉFINITION

Soit M le point du cercle trigonométrique associé à un réel x.

— Le cosinus du réel x, noté $\cos x$, est l'abscisse du point M.

— Le sinus du réel x, noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M.



2 PROPRIÉTÉS

— Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin x$

— Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

— Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXEMPLE :

Sachant que $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

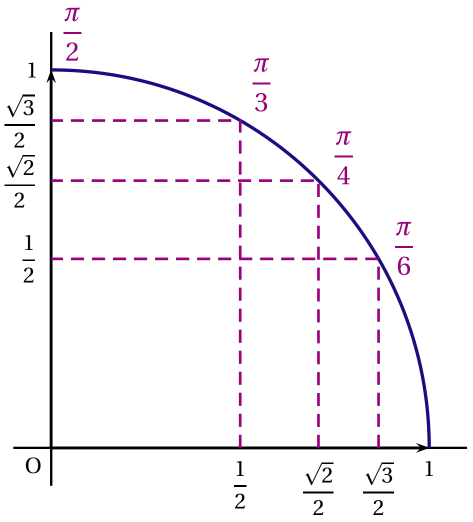
Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\cos^2 x + \frac{5}{9} = 1$, soit $\cos^2 x = \frac{4}{9}$.
Il existe deux valeurs possibles du cosinus :

$$\cos x = -\frac{2}{3} \qquad \text{ou} \qquad \cos x = \frac{2}{3}$$

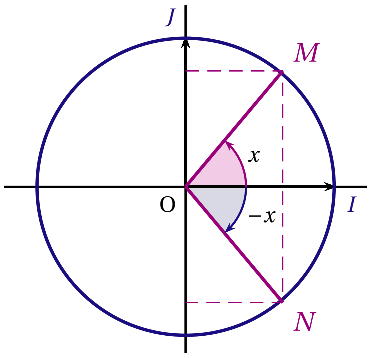
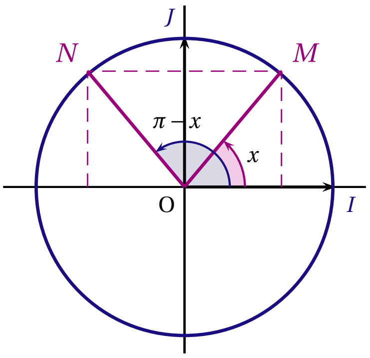
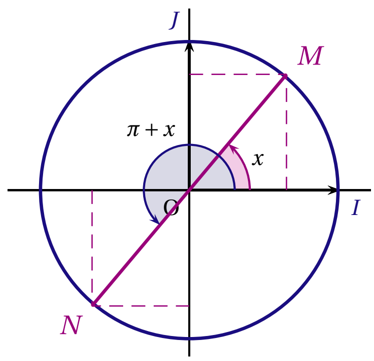
Comme $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, alors $\cos x > 0$ donc $\cos x = \frac{2}{3}$.

3 VALEURS REMARQUABLES

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



4 ANGLES ASSOCIÉS

Pour tout réel x :	Pour tout réel x :	Pour tout réel x :
$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$
		
M et N sont symétriques par rapport à (OI)	M et N sont symétriques par rapport à (OJ)	M et N sont symétriques par rapport à O

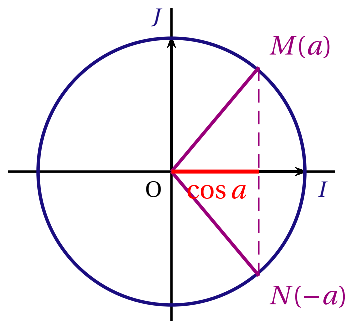
EXEMPLES :

1. $\cos\dfrac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$
2. $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5 ÉQUATIONS

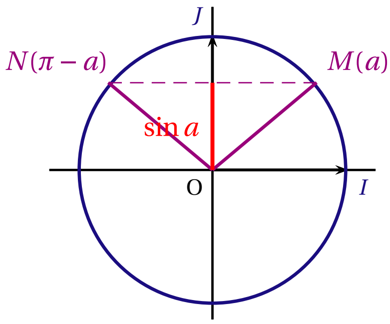
— Équation $\cos x = \cos a$

Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos a$ sont : $\begin{cases} x &= a + k \times 2\pi \\ x &= -a + k \times 2\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif.



— Équation $\sin x = \sin a$

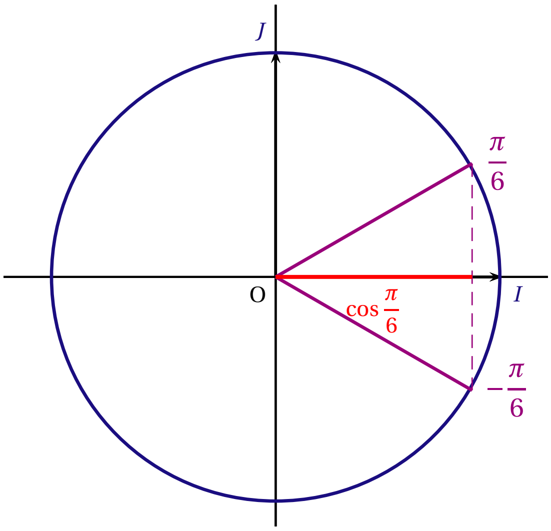
Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin a$ sont : $\begin{cases} x &= a + k \times 2\pi \\ x &= \pi - a + k \times 2\pi \end{cases}$ où k est un entier relatif.



EXEMPLES :

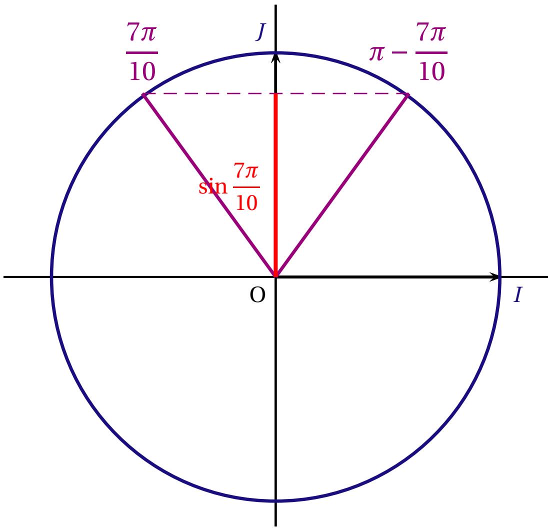
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Comme $\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ l'équation est équivalente à l'équation $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{6}$



   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont $x = \dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi$ avec k entier relatif.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \sin \dfrac{7\pi}{10}$.



   Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin \dfrac{7\pi}{10}$ sont $x = \dfrac{7\pi}{10} + k \times 2\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{10} + k \times 2\pi$ avec k entier relatif.