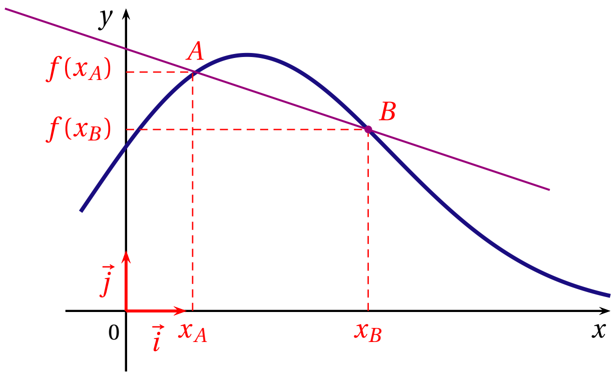
Dérivation

I Taux de variation

1 Définition (vidéo 1)

On nomme f une fonction définie sur I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On nomme $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de $\mathscr{C}_f$



2 Propriété

Le taux de variation de f entre a et b est le ....

3 Exemples : (vidéo 2)

On note f la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$.
Calculer le taux de variation de f entre 3 et -2.

II Nombre dérivée

1 Introduction :(Vidéo 3)

On cherche maintenant à savoir ce qui se passe si on rapproche le point B vers le A jusqu'à ce qu'ils se superposent.
On remarque que lorsqu'on rapproche B de A la droite (AB) se rapproche de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

Lorsque B est très très proche de A alors la droite (AB) est confondue avec la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\{}$ au point d'abscisse a.
Comment traduire cela de façon mathématiques ?

On traduit donc de la façon suivante :
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\{}$ au point d'abscisse a est le taux de variation de f entre a et b lorsque B se rapproche de A.
On note $b = a + h$, l'abscisse du point B.
Pour traduire que le point B est tout proche de A, on va donc dire que h tend vers 0. (car si h tend vers 0, alors $a + h$ tend vers a).
Il faut donc calculer le taux de variation de f entre $a + h$ et a lorsque h tend vers 0.
Or $\tau = \ldots\ldots$
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$m = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

2 Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.
Lorsque le rapport $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite réelle quand h tend vers 0 (avec $a + h$ restant dans I), on dit que la fonction f est dérivable en a et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de f en a.
On note $f'(a)$ le nombre :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3 Application

Soit $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(2)$ (Vidéo 4)

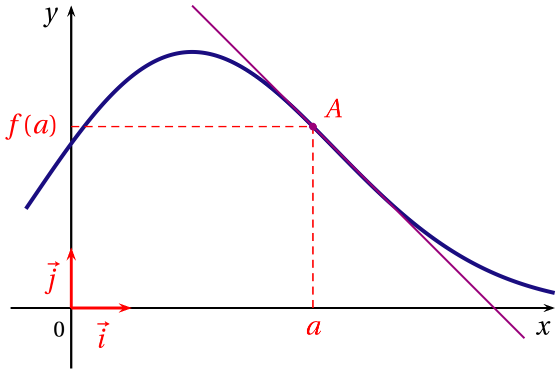
Soit $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $g'(-1)$ (Vidéo 5)

Soit $h : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. (Vidéo 6)

4 Tangente à une courbe

Démonstration (Vidéo 7)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
La droite (T) passant par le point $A\big(a; f(a)\big)$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a



Propriété

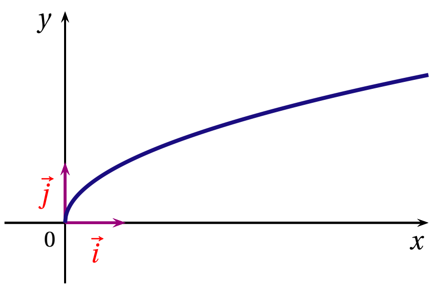
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

....

Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0 (Vidéo 8)

La courbe représentative d'une fonction f peut avoir une tangente en un point a sans que la fonction soit dérivable en a.

....



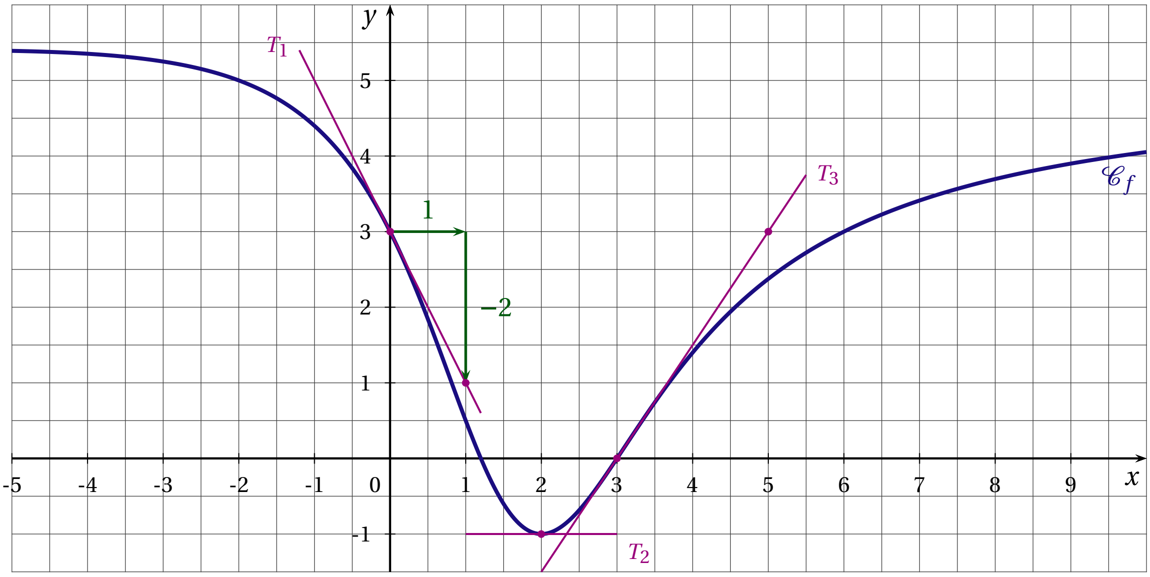
Application : (Vidéo 9)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On souhaite calculer l'équation de (D) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.

....
....
....
....

EXEMPLE GRAPHIQUE : (VIDÉO 10)

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

....

III Fonction dérivée

1 Introduction (Vidéo 11)

On remarque qu'il y a un lien entre le signe du coefficient directeur des tangentes et les variations de la fonction f.
Sur la figure ci-dessus, on remarque que :

- Si la fonction est décroissante sur I alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est négatif.
- Si la fonction est croissante sur I alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans I est positif.

On voit donc que le signe du nombre dérivé est très important pour étudier les variations d'une fonction.
Mais nous n'allons pas nous amuser à calculer le nombre dérivée en tous les points de l'ensemble de définition car nous allons y passer trop temps.

Nous allons donc construire des fonctions qui à x associe le nombre dérivé de f en x.
On nommera cette fonction la fonction dérivée de f.

2 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Lorsque pour tout réel x appartenant à I, f est dérivable en x, on dit que f est dérivable sur I.

La fonction qui associe à tout réel x appartenant à I ....$f'(x)$ est appelée la fonction ....de f sur l'intervalle I. Elle est notée.........

Attention :
L'ensemble de définition de f n'est pas toujours le même que l'ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de f'.

3 DÉMONSTRATION DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

DÉRIVÉE DE FONCTION AFFINE (VIDÉO 12)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$
Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}$
....

DÉRIVÉE DE LA FONCTION CARRÉ (VIDÉO 13)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}$:
....

DÉRIVÉE DE LA FONCTION INVERSE (VIDÉO 13)

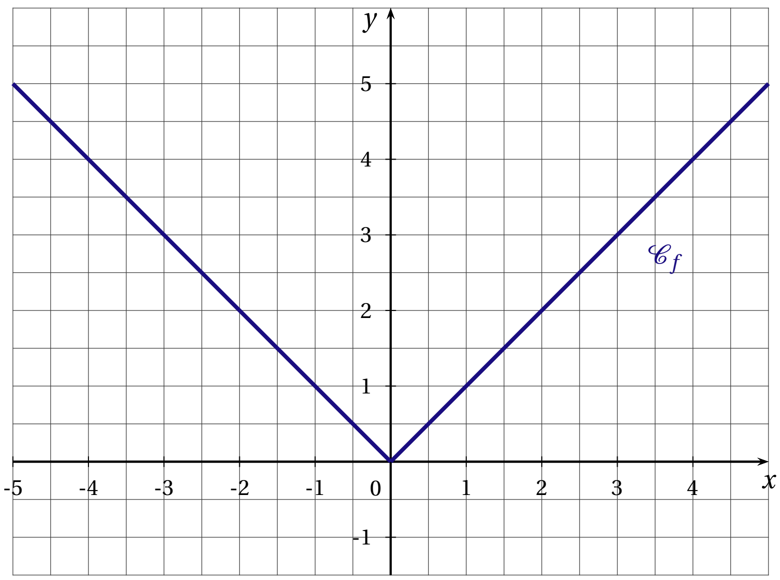
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^*$
....

DÉRIVÉE DE LA FONCTION RACINE CARRÉE (VIDÉO 14)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$
Calculons le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^+$
....

DÉRIVÉE DE LA FONCTION VALEUR ABSOLUE (VIDÉO 15)

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Est-elle dérivable sur l'ensemble de définition?



....

4 Récapitulatif des dérivées des fonctions de référence (Vidéo 16)

fonction définie et dérivable sur :	fonction f définie par :	fonction dérivée f' définie par :
$\mathbb{R}$	$f(x) = k$	$f'(x) = \ldots\ldots$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$f'(x) = \ldots\ldots$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n \quad (n \text{ entier } n \geqslant 1)$	$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n \text{ entier } n \geqslant 1)$	$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$]0;+\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Applications

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$
alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

5 Dérivées et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Démonstration de la dérivée d'un produit (démonstration fondamentale) (Vidéo 17)

……………………………………………

Récapitulatif opérations avec les dérivées (Vidéo 18)

	fonction f définie par :	fonction dérivée f' :
Produit d'une fonction par un réel k	ku	$\ldots\ldots\ldots$
Somme	$u + v$	$u' + v'$
Produit	$u \times v$	$\ldots\ldots\ldots$
Quotient ($v \neq 0$ sur I)	$\dfrac{u}{v}$	$\ldots\ldots\ldots$
Inverse ($v \neq 0$ sur I)	$\dfrac{1}{v}$	$\ldots\ldots\ldots$

EXEMPLES

1. **Produit de deux fonctions**

   Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(2+\dfrac{x^2}{3}\right)\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$. (Vidéo 19)

   ....

2. **Quotient de deux fonctions**

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$. (Vidéo 20)

   ....

IV Dérivée et variations d'une fonction

1 Théorème 1 (Vidéo 21)

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

— Si f est constante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, ...

— Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, ...

— Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x appartenant à I, ...

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

2 Théorème 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I.

— Si f' est nulle sur I, alors f est ....sur I.

— Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est ....sur I.

— Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f ....sur I.

3 Théorème 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I.

1. Si f admet un extremum local en x_0, alors ....
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet ....

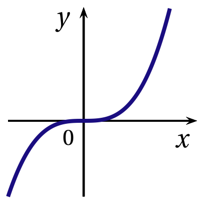
x	a	x_0	b
$f'(x)$	$\cdots$		$\cdots$
$f(x)$		......	

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$\cdots$		$\cdots$
$f(x)$		......	

Remarques

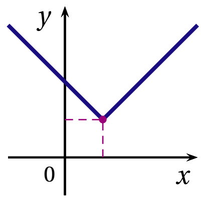
1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est ....

   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   ....



2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

   Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-1|+1$.
   ....



Point méthode

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction f dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$:

- on détermine la dérivée f' de f ;
- on étudie le signe de f' sur $\mathscr{D}_f$;
- on applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}_f$ où le signe de f' est constant;
- on dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.

4 Exercice de synthèse corrigé

Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+5}{x-3}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ (Vidéo 22)