# Dérivation

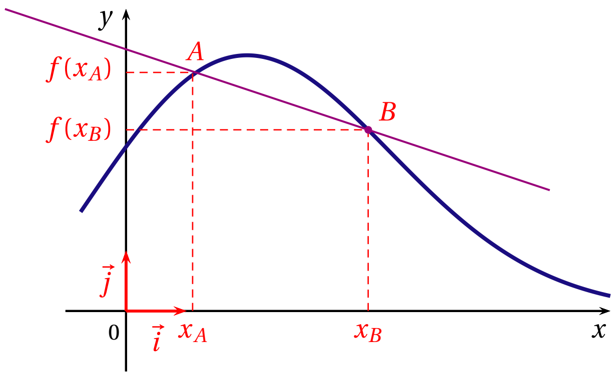
## I Taux de variation

### 1 Introduction :

1. On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$.
   On note $A$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 et $B$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-1$.
   Calculer l'équation de la droite $(AB)$.
2. On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x^2}$.
   On note $A$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 et $B$ le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $-1$.
   Calculer l'équation de la droite $(AB)$.

### 2 Définition

On nomme $f$ une fonction définie sur $I$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.
On nomme $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de $\mathscr{C}_f$




On sait que le coefficient directeur de la droite $(AB)$ est donné par la relation :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

. Ce coefficient mesure la pente de la droite $(AB)$. On s'intéresse à ce coefficient, mais "traduit" en langage de fonction :
Comme $y_B = f(x_B)$ et $y_A = f(x_A)$, en posant : $x_A = a$ et $x_B = b$, il vient :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On note ce coefficient, **taux de variation** de $f$ entre $a$ et $b$.
On le note :

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### 3 Propriété

Le taux de variation de $f$ entre $a$ et $b$ est le coefficient directeur de la droite $(AB)$.

### 4 Exemples

On note $f$ la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$.
Calculer le taux de variation de $f$ entre 3 et -2.

## II Nombre dérivée

### 1 Introduction :

On cherche maintenant à savoir ce qui se passe si on rapproche le point $B$ vers le $A$ jusqu'à ce qu'ils se superposent.
On remarque que lorsqu'on rapproche $B$ de $A$ la droite $(AB)$ se rapproche de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\{}$ au point d'abscisse $a$.
Lorsque $B$ est très très proche de $A$ alors la droite $(AB)$ est confondue avec la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\{}$ au point d'abscisse $a$.
Comment traduire cela de façon mathématiques?

On traduit donc de la façon suivante :
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\{}$ au point d'abscisse $a$ est le taux de variation de $f$ entre $a$ et $b$ lorsque $B$ se rapproche de $A$.
On note $b = a + h$, l'abscisse du point $B$.
Pour traduire que le point $B$ est tout proche de $A$, on va donc dire que $h$ tend vers 0. ( car si $h$ tend vers 0, alors $a + h$ tend vers $a$).
Il faut donc calculer le taux de variation de $f$ entre $a + h$ et $a$ lorsque $h$ tend vers 0.
Or $\tau = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ est :

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

### 2 Définition :

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a$ un réel appartenant à $I$.
Lorsque le rapport $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite réelle quand $h$ tend vers 0 (avec $a + h$ restant dans $I$), on dit que la fonction $f$ est dérivable en $a$ et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de $f$ en $a$.
On note $f'(a)$ le nombre :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

### 3 Autre formulation, en posant $x = a + h$

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a$ un réel appartenant à $I$.
Lorsque le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite réelle quand $x$ tend vers $a$ en restant dans $I$, on dit que la fonction $f$ est dérivable en $a$ et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de $f$ en $a$.
On note alors :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

## 4 APPLICATION

Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(2)$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-(2)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4+h = 4 \text{ donc } f'(2) = 4$$

Soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculer $g'(-1)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-1+h}+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-1+h}+\frac{-1+h}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{-1+h}}{h}$$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h}{-1+h} \times \dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{-1+h} = -1$ donc $g'(-1) = -1$

Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $h'(3)$

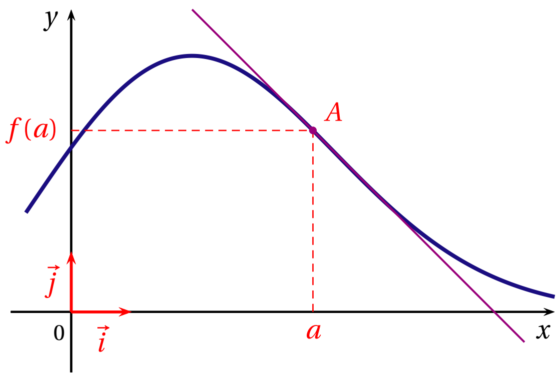
$$h'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} \lim_{h\to 0} \frac{h(3+h)-(3)}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ donc } h'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

## 5 TANGENTE À UNE COURBE

### DÉMONSTRATION DE LA DÉTERMINATION DE L'ÉQUATION DE LA TANGENTE (DÉMONSTRATION FONDAMENTALE)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, dérivable en $a$ où $a$ est un réel de $I$, et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
La droite $(T)$ passant par le point $A\big(a; f(a)\big)$ de la courbe $C_f$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $a$




On cherche à connaître l'équation de la tangente $(T)$ à $\mathscr{C}_f$ en $a$.
On sait que l'équation est de la forme $(T) : y = mx + p$ avec : $m = f'(a)$ . Soit $M(x; y)$ un point de la tangente $(T)$ et $A\big(a; f(a)\big)$ le point de la courbe d'abscisse $a$ qui appartient aussi à la tangente $(T)$.
On sait que $m = \dfrac{Y_M - Y_A}{X_M - X_A} = \dfrac{y - f(a)}{x - a}$
On a alors :

$$m = \frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Il vient avec un produit en croix que :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Ce n'est ni une équation réduite ni cartésienne de la tangente mais cette forme est assez pratique, donc on conserve cette forme pour l'équation de $(T)$ est $(T) : y = f'(a)(x-a)+f(a)$

#### Propriété

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$, dérivable en $a$ où $a$ est un réel de $I$, et $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe $C_f$ au point $A$ d'abscisse $a$ est :

$$y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$$

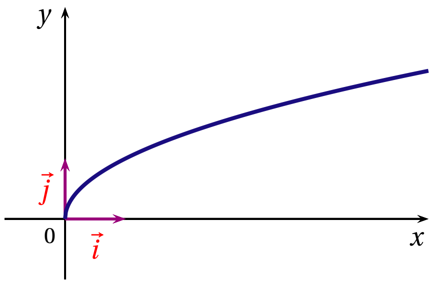
#### Remarque

La courbe représentative d'une fonction $f$ peut avoir une tangente en un point $a$ sans que la fonction soit dérivable en $a$.

La courbe représentative de la fonction racine carrée est tangente à la droite d'équation $x=0$ en 0.
Or la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 en effet :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

ce n'est pas une limite finie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

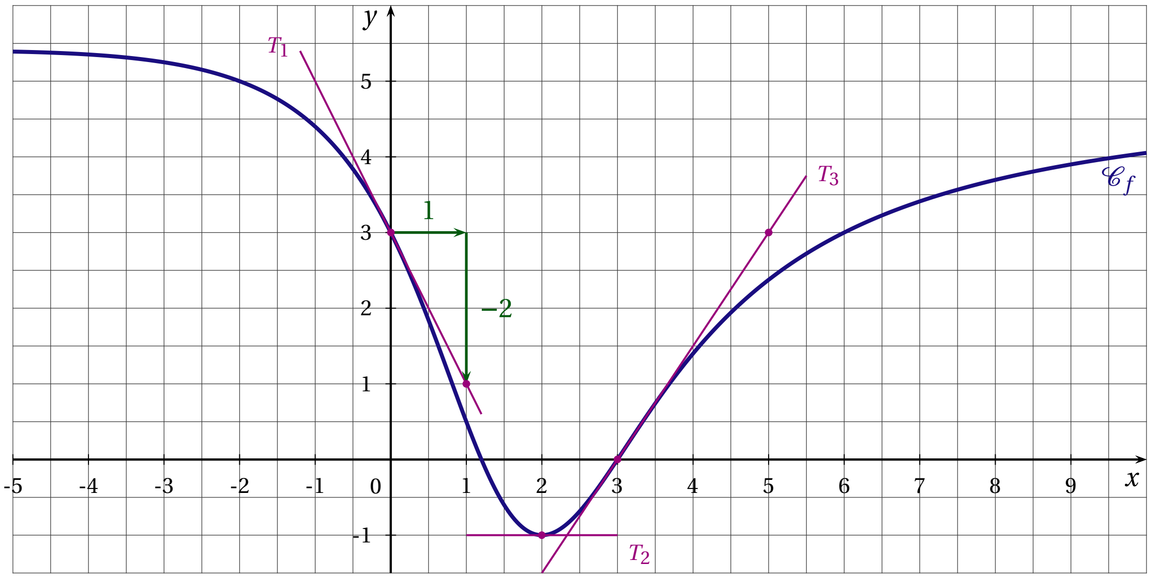



#### Application

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
On souhaite calculer l'équation de $(D)$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.
D'après les exemples précédents : $f'(2) = 4$ et $f(2) = 2^2 = 4$
donc l'équation de $(D)$ est $y = 4(x-2)+4 = 4x-8+4 = 4x-4$

#### Exemple graphique

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$.



Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

1. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente $T_1$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Par lecture graphique, le coefficient directeur de la droite $T_1$ est égal à $-2$. Ainsi, $\boxed{f'(0) = -2}$
2. La tangente $T_2$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses. Donc $\boxed{f'(2) = 0}$
3. La droite $T_3$, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 passe par les points de coordonnées $(3;0)$ et $(5;3)$. Son coefficient directeur $a$ est
$$a = \frac{3-0}{5-3} = \frac{3}{2}$$
   Le nombre dérivé $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3. Donc $\boxed{f'(3) = \frac{3}{2}}$

# III Fonction dérivée

## 1 Introduction

On remarque qu'il y a un lien entre le signe du coefficient directeur des tangentes et les variations de la fonction $f$.
Sur la figure ci-dessus, on remarque que :

- Si la fonction est décroissante sur $I$ alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans $I$ est négatif.
- Si la fonction est croissante sur $I$ alors le coefficient directeur des tangentes aux points d'abscisse dans $I$ est positif.

On voit donc que le signe du nombre dérivé est très important pour étudier les variations d'une fonction. Mais nous n'allons pas nous amuser à calculer le nombre dérivée en tous les points de l'ensemble de définition car nous allons y passer trop temps.
Nous allons donc construire des fonctions qui à $x$ associe le nombre dérivé de $f$ en $x$.
On nommera cette fonction la fonction dérivée de $f$.

## 2 Définition

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Lorsque pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f$ est dérivable en $x$, on dit que $f$ est dérivable sur $I$.

La fonction qui associe à tout réel $x$ appartenant à $I$ son nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $I$. Elle est notée $f'$.

**Attention** :
L'ensemble de définition de $f$ n'est pas toujours le même que l'ensemble de dérivabilité (ensemble de définition de $f'$.

## 3 Démonstration des dérivées des fonctions de référence

### Dérivée de fonction affine

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$
Calculons le nombre dérivé de $f$ en $x_0 \in \mathbb{R}$

$\tau = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{a(x_0+h)+b-ax_0-b}{h} = \dfrac{ah}{h} = a$ donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} a = a$
Ainsi, la fonction dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$ est $f'(x) = a$

#### DÉRIVÉE DE LA FONCTION CARRÉ (DÉMONSTRATION FONDAMENTALE)

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Calculons le nombre dérivé de $f$ en $x_0 \in \mathbb{R}$ :
$\tau = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \dfrac{x_0^2+2hx_0+h^2-x_0^2}{h}$
donc $\tau = \dfrac{2hx_0+h^2}{h} = 2x_0+h$ donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} 2x_0+h = 2x_0$
Ainsi, la fonction dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est $f'(x) = 2x$

#### DÉRIVÉE DE LA FONCTION INVERSE (DÉMONSTRATION FONDAMENTALE)

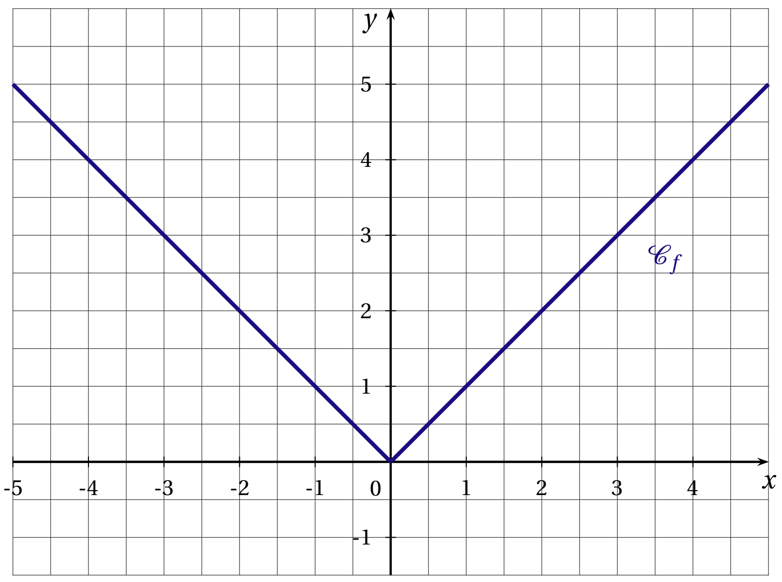
On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
Calculons le nombre dérivé de $f$ en $x_0 \in \mathbb{R}^*$
$\tau = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{x_0+h}-\dfrac{1}{x_0}}{h} = \dfrac{\dfrac{x_0-x_0-h}{x_0^2+hx_0}}{h}$
donc $\tau = \dfrac{-h}{x_0^2+hx_0} \times \dfrac{1}{h} = \dfrac{-1}{x_0^2+hx_0}$
donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{x_0^2+hx_0} = -\dfrac{1}{x_0^2}$
Ainsi, la fonction dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

#### DÉRIVÉE DE LA FONCTION RACINE CARRÉE

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$
Calculons le nombre dérivé de $f$ en $x_0 \in \mathbb{R}^+$
$\tau = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \dfrac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \dfrac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$
donc $\tau = \dfrac{x_0+h-x_0}{h(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$
donc $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$
Ainsi, la fonction dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
Attention, ici $f'(x)$ existe lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pas sur $\mathbb{R}^+$
Le domaine de définition de $f$ et celui de $f'$ sont donc différents.

#### DÉRIVÉE DE LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Est-elle dérivable sur l'ensemble de définition ?
Si on regarde la courbe représentative de la fonction $f$ on voit qu'en 0 elle admet deux tangentes différentes.
Elle ne semble pas dérivable en 0




Étudions la dérivabilité en $x = 0$ :

Soit $h \neq 0 : \tau = \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h}$
Il y a donc deux cas possibles :

- Si $h > 0$ alors $\tau = \dfrac{h}{h} = 1$ et donc $\lim_{h\to 0} \tau = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$
- $h < 0$ alors $\tau = -1$ et donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau = \lim_{h\to 0} -1 = -1$

Il y a donc deux limites différentes, donc $f$ n'est pas dérivable en 0

## 4 Récapitulatif des dérivées des fonctions de référence

| fonction définie et dérivable sur : | fonction $f$ définie par : | fonction dérivée $f'$ définie par : |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = k$ | $f'(x) = 0$ |
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = ax + b$ | $a$ |
| $\mathbb{R}$ | $f(x) = x^n \quad (n \text{ entier } n \geqslant 1)$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ |
| $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ | $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ |
| $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ | $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad (n \text{ entier } n \geqslant 1)$ | $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ |
| $]0; +\infty[$ | $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |

### Applications

On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$
alors $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4$
On note $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$
alors $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

## 5 Dérivées et opérations

$u$ et $v$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$

#### DÉMONSTRATION DE LA DÉRIVÉE D'UN PRODUIT (DÉMONSTRATION FONDAMENTALE)

Soit $f$ la fonction définie sur $I$ pat $f = u \times v$.
On cherche à calculer $f' = (u \times v)'$.
On sait que : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
Commençons par calculer : $f(x+h) - f(x)$ :
$f(x+h) - f(x) = u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x) \quad (1)$
Utilisons que $u(x+h) \times v(x) - u(x+h) \times v(x) = 0$ pour l'ajouter à l'égalité (1).
(1) $\iff f(x+h) - f(x) = u(x+h) \times v(x+h) - u(x) \times v(x) + u(x+h) \times v(x) - u(x+h) \times v(x)$
$\iff f(x+h) - f(x) = u(x+h) \times v(x+h) - u(x+h) \times v(x) + u(x+h) \times v(x) - u(x) \times v(x)$
en ne faisant que réorganiser les termes de la somme.
$\iff f(x+h) - f(x) = u(x+h)\left[v(x+h) - v(x)\right] + v(x)\left[u(x+h) - u(x)\right]$ en factorisant chaque membre.
Il vient alors : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{u(x+h)\times(v(x+h)-v(x))}{h} + \frac{v(x)(u(x+h)-u(x))}{h}$
et en passant à la limite :
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)(v(x+h)-v(x))}{h} + \frac{v(x)(u(x+h)-u(x))}{h} \quad (2)$
On calcule séparément : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)(v(x+h)-v(x))}{h}$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x)(u(x+h)-u(x))}{h}$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)(v(x+h)-v(x))}{h}$ ?
$\lim\limits_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x)$
donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)(v(x+h)-v(x))}{h} = u(x)v'(x)$
En procédant de même, on obtient que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x)(u(x+h)-u(x))}{h} = v(x) \times u'(x)$
Au final,

$$(2) \iff u(x)v'(x) + u'(x) \times v(x)$$

#### TABLEAU RÉCAPITULATIF

| | fonction $f$ définie par : | fonction dérivée $f'$ : |
|---|---|---|
| Produit d'une fonction par un réel $k$ | $ku$ | $ku'$ |
| Somme | $u+v$ | $u'+v'$ |
| Produit | $u \times v$ | $u'v+uv'$ |
| Quotient ($v \neq 0$ sur $I$) | $\dfrac{u}{v}$ | $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| Inverse ($v \neq 0$ sur $I$) | $\dfrac{1}{v}$ | $-\dfrac{v'}{v^2}$ |

#### EXEMPLES

1. **Produit de deux fonctions**

   Soit $f$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(2 + \dfrac{x^2}{3}\right)\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$.

   Sur $]0;+\infty[$ $f$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

   $f = uv$ d'où $f' = u'v + uv'$. Avec pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$u(x) = 2 + \frac{x^2}{3} \quad \text{d'où} \quad u'(x) = \frac{2x}{3}$$
$$v(x) = 1 - \frac{2}{x} \quad \text{d'où} \quad v'(x) = \frac{2}{x^2}$$

Soit pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{3}\times\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{2}{x^2}\times\left(2+\frac{x^2}{3}\right) \\ &= \frac{2x}{3}-\frac{4}{3}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{3} \\ &= \frac{2x^3-2x^2+6}{3x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f'(x)=\dfrac{2x^3-2x^2+6}{3x^2}$.

2. **Quotient de deux fonctions**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.
Sur $\mathbb{R}$, $f$ est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.
$f=\dfrac{u}{v}$ d'où $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$. Avec pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned} u(x)&=4x-3 \quad \text{d'où} \quad u'(x)=4 \\ v(x)&=x^2+1 \quad \text{d'où} \quad v'(x)=2x \end{aligned}$$

Soit pour tout réel $x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x^2+1)-2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $f'$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=\dfrac{-4x^2+6x+4}{(x^2+1)^2}$.

## IV Dérivée et variations d'une fonction

### 1 Théorème 1

Soit $f$ une fonction dérivable et monotone sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

— Si $f$ est constante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x)=0$.

— Si $f$ est croissante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x)\geqslant 0$.

— Si $f$ est décroissante sur $I$, alors pour tout réel $x$ appartenant à $I$, $f'(x)\leqslant 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

### 2 Théorème 2

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $f'$ la dérivée de $f$ sur $I$.

— Si $f'$ est nulle sur $I$, alors $f$ est constante sur $I$.

— Si $f'$ est strictement positive sur $I$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.

— Si $f'$ est strictement négative sur $I$, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.

## 3 Théorème 3

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$ et $x_0$ un réel appartenant à $I$.

1. Si $f$ admet un extremum local en $x_0$, alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée $f'$ s'annule en $x_0$ **en changeant de signe**, alors $f$ admet un extremum local en $x_0$.

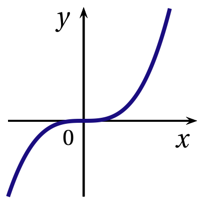
| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ↘ | | *minimum* | | ↗ |

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ↗ | | *maximum* | | ↘ |

### Remarques

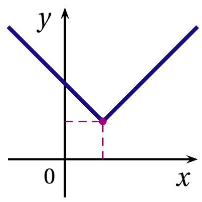
1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

   Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
   $f'(0) = 0$ et pour tout réel $x$ non nul, $f'(x) > 0$.
   La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.




2. Une fonction peut admettre un extremum local en $x_0$ sans être nécessairement dérivable.

   Considérons la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x-1|+1$ .
   $f$ est une fonction affine par morceaux, $f$ admet un minimum $f(1) = 1$ or $f$ n'est pas dérivable en 1.




### Point méthode

En pratique, pour étudier les variations d'une fonction $f$ dérivable sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ :

- on détermine la dérivée $f'$ de $f$ ;
- on étudie le signe de $f'$ sur $\mathscr{D}_f$ ;
- on applique le théorème 2 sur chacun des intervalles de $\mathscr{D}_f$ où le signe de $f'$ est constant;
- on dresse le tableau des variations en indiquant les extremums, s'il y a lieu et éventuellement les limites aux bornes de son ensemble de définition.

## 4 Exercice de synthèse corrigé

Étudier les variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+5}{x-3}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

**Rédaction :**

Calculons sa fonction dérivée en utilisant la forme $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

On note $u(x) = 2x^2+3x+5$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
$v(x) = x-3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
Alors $u'(x) = 4x+3$ et $v'(x) = 1$
$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$

et $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(4x+3)(x-3) - \left(2x^2+3x+5\right)(1)}{(x-3)^2} = \frac{2\left(x^2-6x-7\right)}{(x-3)^2}$$

II faut donc étudier le signe de $x^2-6x-7$ puisque $(x-3)^2$ est toujours positif.
$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4(-7)(1) = 36+28 = 64 = 8^2$
donc $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+8}{2} = 7$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-8}{2} = -1$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | -∞ | | $-1$ | | 3 | | 7 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | $\Vert$ | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | $-1$ | ↘ | $\Vert$ | ↘ | 28.5 | ↗ | |

$f(-1) = -1$ et $f(7) = 28{,}5$