# Les Équations du second degré

## I Propriété fondamentale

### 1 – démonstration (Vidéo 1)

Une équation du second degré à une inconnue $x$, est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax^2+bx+c=0 \text{ où } a,\, b,\, c \text{ sont des réels et } a\neq 0$$

.

L'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous la forme $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$

### 2 – Propriété

Soit $S$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels fixés avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution ; $S=\emptyset$.

— Si $\Delta=0$ alors l'équation a une seule solution ; $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

— Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions ; $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

## 3 – EXEMPLES

**1. Résoudre dans** $\mathbb{R}$ $2x+3x-4=0$ **( Vidéo 2 ) :**

Il s'agit d'une équation du second degré sous la forme $ax^2+bx+c=0$ avec
$a=\dots$, $b=\dots$ et $c=\dots$
Le discriminant du trinôme est $\Delta=\dots\dots\dots$ soit $\Delta=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_2=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

L'ensemble des solutions de l'équation $2x+3x-4=0$ est $S=\{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\}$

**2. Résoudre dans** $\mathbb{R}$ $x^2+x+1=0$ **(Vidéo 3) :**

Il s'agit d'une une équation du second degré sous la forme $ax^2+bx+c=0$
avec $a=\dots\dots$, $b=\dots\dots$ et $c=\dots\dots$

Le discriminant du trinôme est $\Delta=\dots\dots\dots\dots$ soit $\Delta=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
Comme $\Delta\dots\dots$, l'équation $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

L'ensemble des solutions de l'équation $x^2+x+1=0$ est $S=\dots\dots\dots$

**3. Résoudre dans** $\mathbb{R}$ **l'équation** $6x^2-3=7x$ **(Vidéo 4) :**

Il faut mettre cette équation sous la forme $ax^2+bx+c=0$ Pour tout réel $x$,

$$6x^2-3=7x \Leftrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\cdots=0$$

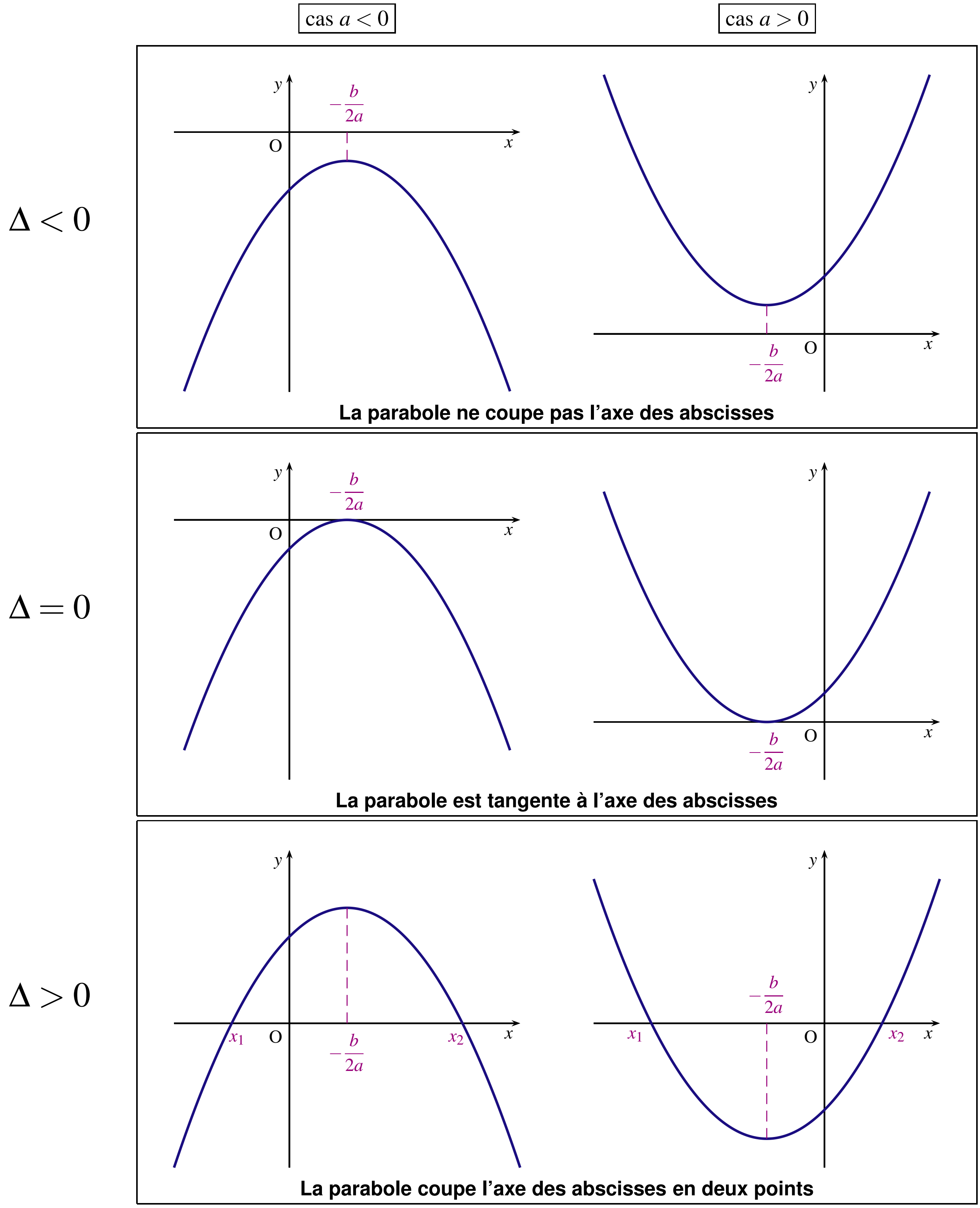
Il s'agit de résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec
$a=\dots\dots$, $b=\dots\dots$ et $c=\dots\dots$
Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac$ soit $\Delta=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
Comme $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_2=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

L'ensemble des solutions de l'équation $6x^2-3=7x$ est $S=\{\dots\dots;\dots\dots\}$

## II Interprétation graphique (Vidéo 5)




**REMARQUE**

Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées les racines du trinôme

$$ax^2+bx+c$$

## III Somme et Produit de racines (vidéo 6) :

**Rédaction :**

Soit $S$ et $P$ la somme et produit de deux réels $x_1$ et $x_2$.
On veut résumer ces informations par ce système de deux équations à deux inconnues :

### APPLICATION

**Énoncé :**

Existe-t-il deux nombres réels dont la somme vaut 4 et le produit 13 ?

**Rédaction :**

Supposons que ces deux réels existent. On les appelle $x_1$ et $x_2$.

## IV Changement de variable (vidéo 7)

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $-2x^2+9x-4=0$.
En déduire, les solutions des équations suivantes :

1. $-2x^4+9x^2-4=0$
2. $-2x+9\sqrt{x}-4=0$
3. $-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{9}{x}-4=0$

**Rédaction :**

L'équation $-2x^2+9x-4=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, $S=\left\{\dfrac{1}{2};4\right\}$ (non rédigé).

1. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$, $-2x^4+9x^2-4=0$

2. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$, $-2x+9\sqrt{x}-4=0$

3. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$, $-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{9}{x}-4=0$

# V Signe du trinôme

## 1 – Factorisation (Vidéo 6)

Factorisation du trinôme $ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ :

— Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.

— Si $\Delta = 0$ en notant $x_0$ l'unique racine : $f(x) = a(x-x_0)^2$.

— Si $\Delta > 0$ en notant $x_1$ et $x_2$ les deux racines : $f(x) = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

### Démonstration

Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$

## 2 – Exemples

1. Factoriser $4x-3x-1$

2. Factoriser $\frac{1}{2}x - 4x + 8$

## 3 – Propriété

Soit $f$ un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel $x$, $f(x)$ est du signe de $a$.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de $a$ pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, $x_1$ et $x_2$ désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x)$ est du signe de $a$ pour tout réel $x \in ]-\infty ; x_1[ \cup ]x_2 ; +\infty[$ et $f(x)$ est du signe contraire de celui de $a$ pour tout réel $x \in ]x_1 ; x_2[$.

### Démonstration

Soit $f$ une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - x_1$ | | | 0 | | | | |
| $x - x_2$ | | | | | 0 | | |
| $a(x-x_1)(x-x_2)$ | | | 0 | | 0 | | |

### Remarque

On retiendra la règle « Un polynôme du second degré est du signe de $a$ ..................................
..........

## 4 – Exemples

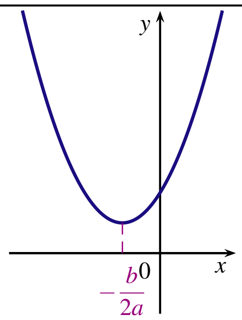
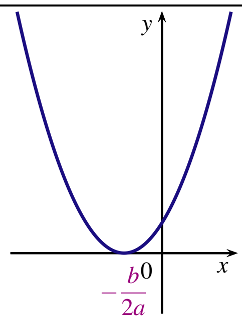
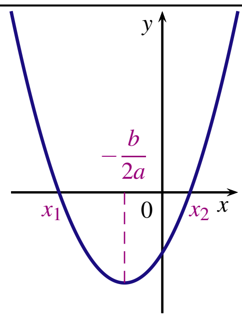
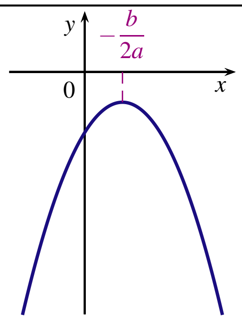
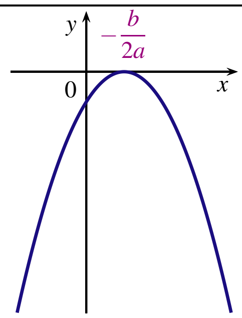
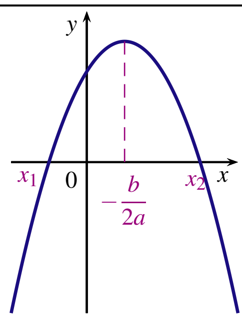
1. Résoudre l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4}-x+3\leqslant 0$.

   Étudions le signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4}-x+3$ avec

2. Étudier les positions relatives de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$ avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x-3$

   Les positions relatives de la parabole et de la droite se déduisent du signe de

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

| | Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $a > 0$ | Variations | $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\dfrac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \searrow & f\left(-\frac{b}{2a}\right) & \nearrow & \end{array}$ | | |
| | Courbe |  |  |  |
| | Solutions de $ax^2+bx+c=0$ | Pas de solution | Une solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ | Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| | Signe de $ax^2+bx+c$ | Strictement positif sur $\mathbb{R}$ | Positif sur $\mathbb{R}$ | Positif sur $]-\infty;x_1] \cup [x_2;+\infty[$ Négatif sur $[x_1;x_2]$ |
| $a < 0$ | Variations | $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\dfrac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \nearrow & f\left(-\frac{b}{2a}\right) & \searrow & \end{array}$ | | |
| | Courbe |  |  |  |
| | Solutions de $ax^2+bx+c=0$ | Pas de solution | Une solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ | Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| | Signe de $ax^2+bx+c$ | Strictement négatif sur $\mathbb{R}$ | Négatif sur $\mathbb{R}$ | Négatif sur $]-\infty;x_1] \cup [x_2;+\infty[$ Positif sur $[x_1;x_2]$ |