Les Équations du second degré

I Propriété fondamentale

1 – Démonstration (Vidéo 1)

Une équation du second degré à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax^2+bx+c=0 \text{ où } a, b, c \text{ sont des réels et } a\neq 0$$

.

L'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous la forme $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$

On pose $\Delta=b^2-4ac$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ équivaut à l'équation $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]=0$, soit encore $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0$.

— Si $\Delta<0$ alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$ et $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. Donc l'équation du second degré n'a pas de solution.

— Si $\Delta=0$ alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ équivaut à l'équation $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$. Donc l'équation du second degré a pour unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$.

— Si $\Delta>0$ alors :

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\end{aligned}$$

Donc l'équation du second degré a deux solutions $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

2 – Propriété

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels fixés avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution ; $S=\emptyset$.

— Si $\Delta=0$ alors l'équation a une seule solution ; $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.

— Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions ; $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

3 – EXEMPLES

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $2x^2+3x-4=0$ **(Vidéo 2) :**

Il s'agit d'une équation du second degré sous la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=2$, $b=3$ et $c=-4$ Le discriminant du trinôme est

$$\Delta = b^2-4ac$$

soit

$$\Delta = (3)^2-4\times 2\times(-4) = 9+32 = 41$$

. Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $2x^2+3x-4=0$ est

$$S = \left\{\frac{-3-\sqrt{41}}{4};\frac{-3+\sqrt{41}}{4}\right\}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x^2+x+1=0$ **(Vidéo 3) :**

Il s'agit d'une une équation du second degré sous la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=1$ et $c=1$
Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2-4ac$ soit $\Delta = (1)^2-4\times 1\times(1) = -3$.
Comme $\Delta < 00$, l'équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $x^2+x+1=0$ est

$$S = \emptyset$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ **l'équation** $6x^2-3=7x$ **(Vidéo 4) :**

Il faut mettre cette équation sous la forme

$$ax^2+bx+c=0$$

Pour tout réel x,

$$6x^2-3=7x \Leftrightarrow 6x^2-7x-3=0$$

Il s'agit de résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=6$, $b=-7$ et $c=-3$
Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2-4ac$ soit $\Delta = (-7)^2-4\times 6\times(-3) = 49+72 = 121$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_1 = \frac{7-11}{12} = -\frac{1}{3}$$

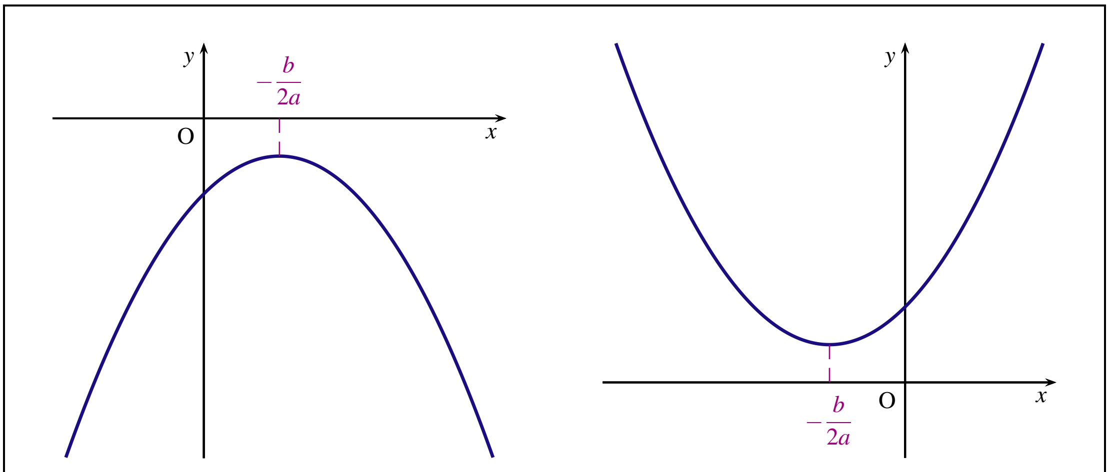
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_2 = \frac{7+11}{12} = \frac{3}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $6x^2-3=7x$ est $S = \left\{-\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right\}$

II Interprétation graphique (Vidéo 5)

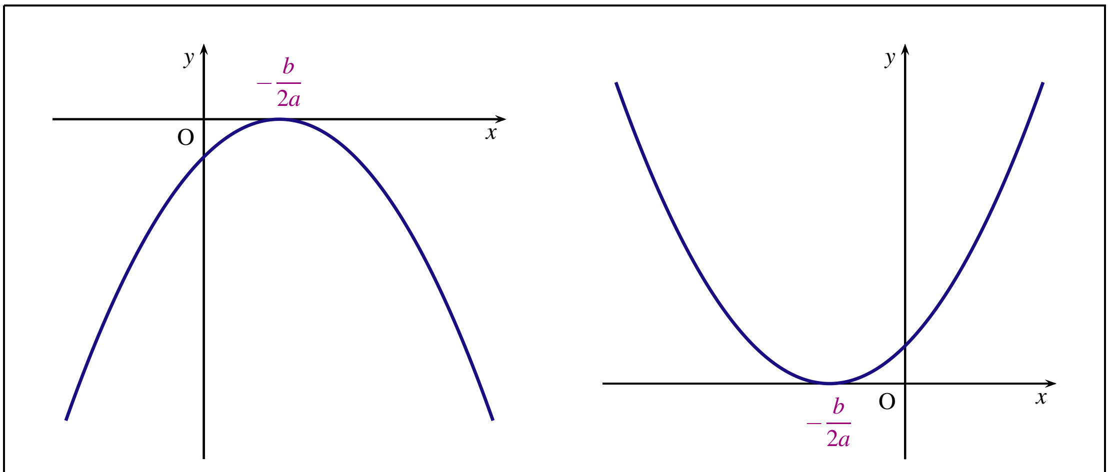
$\boxed{\text{cas } a<0}$ $\boxed{\text{cas } a>0}$

$\Delta < 0$



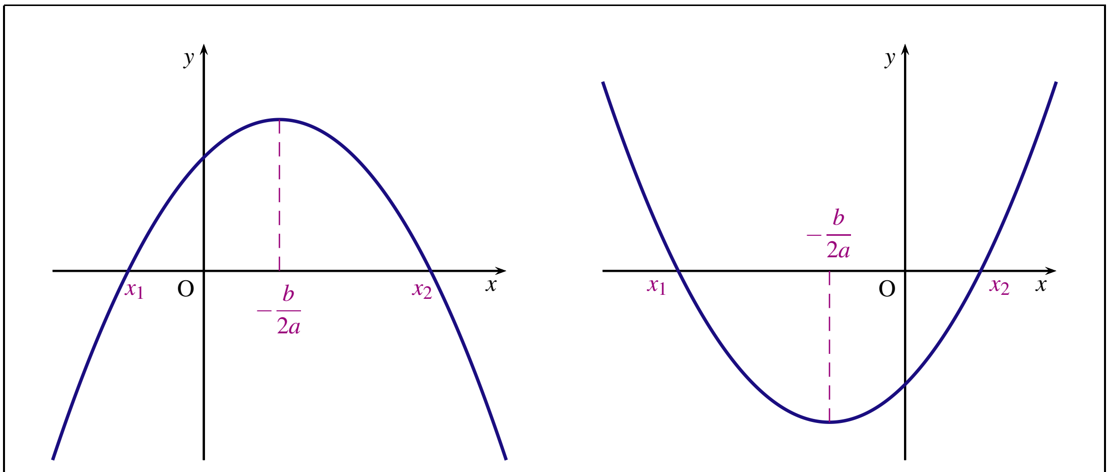
La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses

$\Delta = 0$



La parabole est tangente à l'axe des abscisses

$\Delta > 0$



La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points

REMARQUE

Les solutions éventuelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées les racines du trinôme

$$ax^2+bx+c$$

III Somme et Produit de racines (vidéo 6)

: **Rédaction :**

Soit S et P la somme et produit de deux réels x_1 et x_2.
On veut résuler ces informations par ce système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{lll} S & = & x_1+x_2 \\ P & = & x_1\times x_2 \end{array}\right.$$

En résolvant par substitution, a un système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & S-x_2 \\ P & = & (S-x_2)\times x_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & S-x_2 \\ P & = & Sx_2-x_2^2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & x_2-S \\ 0 & = & Sx_2-x_2^2-P \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & x_2-S \\ x_2^2 & - & Sx_2+P=0 \end{array}\right.$$

Le nombre x_2 est donc solution de l'équation

$$x^2-Sx+P=0$$

On pourrait procéder de même avec x_1 et prouver que le nombre x_1 est aussi solution de cette équation.
On a donc prouvé que les solutions de l'équation :

$$x^2-Sx+P=0$$

sont

$$S=\{x_1;x_2\}$$

Application

Énoncé :

Existe-t-il deux nombres réels dont la somme vaut 4 et le produit 13 ?(Vidéo 7)

Rédaction :

Supposons que ces deux réels existent. On les appelle x_1 et x_2. On appelle S leur somme et P leur produit.
On sait d'après le cours, que S et P vérifient l'équation :

$$x^2-Sx+P=0$$

donc

$$x^2-4x+13=0$$

On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times13=-38<0$ Cette équation n'admet donc pas de solutions réelles.
Il n'existe donc pas de nombres réels dont la somme vaut 4 et le produit 13.

IV Changement de variable

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $-2x^2+9x-4=0$.
En déduire, les solutions des équations suivantes :

1. $-2x^4+9x^2-4=0$
2. $-2x+9\sqrt{x}-4=0$
3. $-\frac{2}{x^2}+\frac{9}{x}-4=0$

Rédaction :

L'équation $-2x^2+9x-4=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, $S=\left\{\frac{1}{2};4\right\}$ (non rédigé).

1. Pour résoudre dans $\mathbb{R}$, $-2x^4+9x^2-4=0$ (Vidéo 8)
On pose $X=x^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On a alors : $-2x^4+9x^2-4=0 \iff -2X^2+9X-4=0$
On sait que cette équation admet deux solutions : $X_1=\frac{1}{2}$ et $X_2=4$
Comme on a posé $X=x^2$, pour revenir aux solutions "en x", on résout :
$x^2=\frac{1}{2}$ qui est équivalent à $S_1=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ et $x^2=4$ qui est équivalent à $S_2=\{-2;2\}$
d'où $S=S_1\cup S_2$, ce qui donne : $S=\left\{-2;-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};2\right\}$

2. $-2x+9\sqrt{x}-4=0$ (Vidéo 9)
Cette équation est définie sur $D=\mathbb{R}_+$.
On pose $X=\sqrt{x}$ pour tout $x\in D$.
On a alors : $X^2=x$ pour tout $x\in D$.
Il vient : $-2x+9\sqrt{x}-4=0 \iff -2X^2+9X-4=0$
On sait que cette équation admet deux solutions : $X_1=\frac{1}{2}$ et $X_2=4$
Comme on a posé $X=\sqrt{x}$, pour revenir aux solutions "en x", on résout :
$\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ qui est équivalent à $S_1=\left\{\frac{1}{4}\right\}$ et $\sqrt{x}=4$ qui est équivalent à $S_2=\{16\}$
Les solutions appartiennent bien à D, donc $S=S_1\cup S_2$, ce qui donne : $S=\left\{\frac{1}{4};16\right\}$

3. $-\frac{2}{x^2}+\frac{9}{x}-4=0$ (Vidéo 10) Cette équation est définie sur $D=\mathbb{R}^*$.
On pose $X=\frac{1}{x}$ pour tout $x\in D$.
On a alors : $X^2=\frac{1}{x^2}$ pour tout $x\in D$.
Il vient : $-\frac{2}{x^2}+\frac{9}{x}-4=0 \iff -2X^2+9X-4=0$
On sait que cette équation admet deux solutions : $X_1=\frac{1}{2}$ et $X_2=4$
Comme on a posé $X=\frac{1}{x}$, pour revenir aux solutions "en x", on résout :
$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ qui est équivalent à $S_1=\{2\}$ et $\frac{1}{x}=4$ qui est équivalent à $S_2=\{\frac{1}{4}\}$
Les solutions appartiennent bien à D, donc $S=S_1\cup S_2$, ce qui donne : $S=\left\{\frac{1}{4};2\right\}$

V Signe du trinôme

1 – Factorisation (Vidéo 11)

Factorisation du trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$:

— Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.

— Si $\Delta = 0$ en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x-x_0)^2$.

— Si $\Delta > 0$ en notant x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

✻ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

$$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

— Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs; le trinôme ne se factorise pas.

— Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. Soit en notant $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ l'unique racine on a :

$$f(x) = a(x-x_0)^2$$

— Si $\Delta > 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$. Soit en notant $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ les deux racines on a :

$$f(x) = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$$

2 – Exemples

Factoriser l'expression $4x^2-3x-1$ (Vidéo 12)

Il faut trouver les racines du polynôme qui est de la forme ax^2+bx+c avec $a = 4$, $b = -3$ et $c = -1$.
Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2-4ac$
d'où $\Delta = (-3)^2 - 4\times4\times(-1) = 9+16 = 25$.
Comme $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{-(-3)-5}{2\times4} = -\frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{-(-3)+5}{2\times4} = 1$$

L'ensemble des racines du polynôme $4x^2-3x-1$ sont $S = \left\{-\dfrac{1}{4};1\right\}$

On sait alors, comme $\Delta > 0$, que

$$ax^2+bx+c = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$$

. d'où

$$4x^2-3x-1 = 4(x-1)(x+\frac{1}{4})$$

FACTORISER L'EXPRESSION $\frac{1}{2}x-4x+8$ (VIDÉO 13)

Il faut trouver les racines du polynôme qui est de la forme ax^2+bx+c avec $a=\frac{1}{2}$, $b=-4$ et $c=8$.
Le discriminant du trinôme est $\Delta=b^2-4ac$
d'où $\Delta=(-4)^2-4\times\frac{1}{2}\times 8=16-16=0$.
Comme $\Delta=0$, le polynôme admet une unique racine :

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\times\frac{1}{2}}=4$$

On sait alors, comme $\Delta=0$, que :

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_0\right)^2$$

. d'où

$$\frac{1}{2}x-4x+8=\frac{1}{2}(x-4)^2$$

3 – PROPRIÉTÉ (VIDÉO 14)

Soit f un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta<0$ alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.

— Si $\Delta=0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x\neq-\frac{b}{2a}$.

— Si $\Delta>0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1<x_2$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x\in\left]-\infty;x_1\right[\cup\left]x_2;+\infty\right[$ et $f(x)$ est du signe contraire de celui de a pour tout réel $x\in\left]x_1;x_2\right[$.

✼ DÉMONSTRATION

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

— Si $\Delta<0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs donc le signe du trinôme est le signe de a pour tout réel x.

— Si $\Delta=0$ alors $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ donc $f(x)$ est nul pour $x=-\frac{b}{2a}$; pour les autres valeurs de x le signe du trinôme est le signe de a.

— Si $\Delta>0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1<x_2$ alors $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.
Étudions le signe du produit $a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

REMARQUE

On retiendra la règle « Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines.

4 – EXEMPLES

1. Résoudre l'inéquation $-\frac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$ (Vidéo 15).

   Étudions le signe du trinôme $-\frac{x^2}{4} - x + 3$ avec $a = -\frac{1}{4}$, $b = -1$ et $c = 3$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times 3 = 1 + 3 = 4$.

   Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{1-2}{-\frac{1}{2}} = 2$$

   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{1+2}{-\frac{1}{2}} = -6$$

   Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines. Ainsi :

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
Signe du trinôme $-\frac{x^2}{4} - x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-\frac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$ est $S =]-\infty; -6] \cup [2; +\infty[$.

2. Étudier les positions relatives de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ (Vidéo 16)

   Les positions relatives de la parabole et de la droite se déduisent du signe de

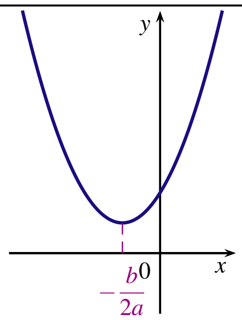
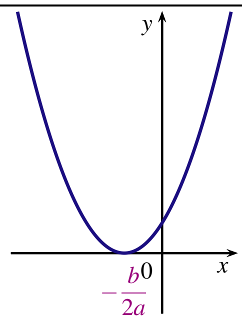
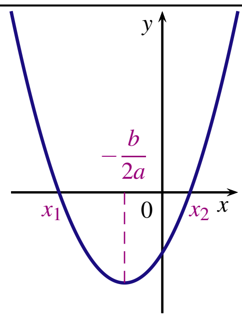
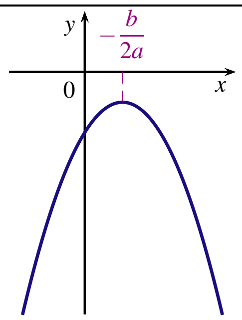
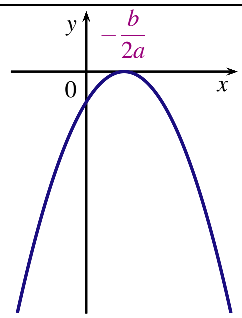
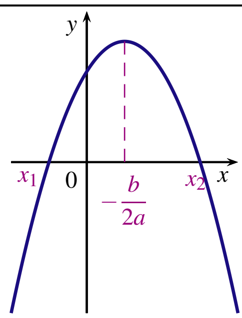
   $$x^2 - (2x - 3) = x^2 - 2x + 3$$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$.

   Comme $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a donc pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$.

   La parabole $\mathscr{P}$ est au dessus de la droite $\mathscr{D}$.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

	Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	Variations	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \searrow & f\left(-\frac{b}{2a}\right) & \nearrow & \end{array}$		
	Courbe			
	Solutions de $ax^2+bx+c=0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de ax^2+bx+c	Strictement positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $\mathbb{R}$	Positif sur $]-\infty;x_1] \cup [x_2;+\infty[$ Négatif sur $[x_1;x_2]$
$a < 0$	Variations	$\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline f(x) & & \nearrow & f\left(-\frac{b}{2a}\right) & \searrow & \end{array}$		
	Courbe			
	Solutions de $ax^2+bx+c=0$	Pas de solution	Une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
	Signe de ax^2+bx+c	Strictement négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $\mathbb{R}$	Négatif sur $]-\infty;x_1] \cup [x_2;+\infty[$ Positif sur $[x_1;x_2]$