Correction Devoir Surveillé de mathématiques n°1

EXERCICE 1 — 6 points

1. Pour une clé, il n'y a que deux issues. Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli.
Comme les tirages sont avec remise, les épreuves sont identiques et indépendantes. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.
On peut en déduire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de clés défectueuses dans le lot de 100 clés suit la loi binomiale de paramètres n nombre d'épreuves et p probabilité de succès (ici, défectueuse), $n = 100$ et $p = 0,015$.

2. Quand une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p, la probabilité de l'événement $X = k$ est donnée par :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On en déduit que $p(X = 0) = \binom{100}{0} \times 0,015^0 \times (1-0.015)^{100} \approx 0,221$ et $p(X = 1) = \binom{100}{1} \times 0,015^1 \times (1-0.015)^{99} \approx 0,336$.

3. Au plus deux clés soient défectueuses correspond à l'événement $X \leqslant 2$:
$p(X \leqslant 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \approx 0,221 + 0,336 + 0,253 \approx 0,810$
La probabilité qu'au plus deux clés soient défectueuses est environ 0,810.

EXERCICE 2 — 7 points

1. a. On voit deux tangentes horizontales à la courbe, en A et C. Il y a donc deux solutions à l'équation $f'(x) = 0$.

b. La tangente à $\mathscr{C}_\{$ en $B(0;1)$ passe par le point C de coordonnées $C(3;-3)$.
On cherche son coefficient directeur : $m = \dfrac{Y_C - Y_B}{X_C - X_B} = \dfrac{-3-0}{3-1} = -\dfrac{3}{2}$ Il vient $f'(1) = -\dfrac{3}{2}$

2. Le point D appartient à la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D. On a $D(5; f(5))$.
Donc : $f(5) = \dfrac{7}{8} \times 5 - \dfrac{145}{24} = \dfrac{35}{8} - \dfrac{145}{24} = \dfrac{105-145}{24} = -\dfrac{40}{24} = -\dfrac{5}{3}$.
On sait que le coefficient directeur en un point de la tangente est égal au nombre dérivé. Donc $f'(5) = \dfrac{7}{8}$

3. On observe en 0, un coefficient directeur de tangente clairement négatif. $f(0) < 0$. La proposition est donc fausse.

4. f est croissante sur $]-7;-2[$. On a donc , pour $x \in]-7;-2[$, $f'(x) > 0$. La courbe $\mathscr{C}_1$ est déjà à rejeter.
On lit sur $\mathscr{C}_2$, $f'(1) \approx -3$, ce qui est contradictoire avec la valeur trouvée 1.b. La courbe $\mathscr{C}_2$ est déjà à rejeter.
On lit sur $\mathscr{C}_3$, $f'(1) \approx -1,4$, ce qui est cohérent avec la valeur trouvée 1.b.
La représentation graphique de la fonction f' est donc $\mathscr{C}_3$.

EXERCICE 3 — 7 points

1. $f'(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 2x - 4$

2. On résout $f'x) = 0 \iff \dfrac{3}{4}x^2 - 2x - 4 = 0$. On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times \dfrac{3}{4} \times (-4) = 4 + 12 = 16 = 4^2$
Il y a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{\frac{3}{2}} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{4}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{4}{3}\right)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	

$f\left(-\dfrac{4}{3}\right)$ et $f(1)$

3. On sait qu'une équation de tangente à une courbe $\mathscr{C}_\{$ en x_0 est donné par la relation :$(T_{x_0}) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_O)$ Comme $f'(0) = -4$ et $f(0 =)2$, on a : $(T_0) : y = f'(0)x + f(0)$ d'où : $(T_0) : y = -4x + 2$