Les nombres réels

1 L'ensemble $\mathbb{R}$

Définition

On appelle $\mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels, c'est dire ceux que l'on peut représenter sur une droite graduée.

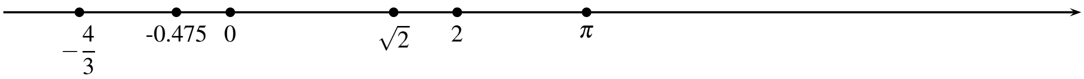
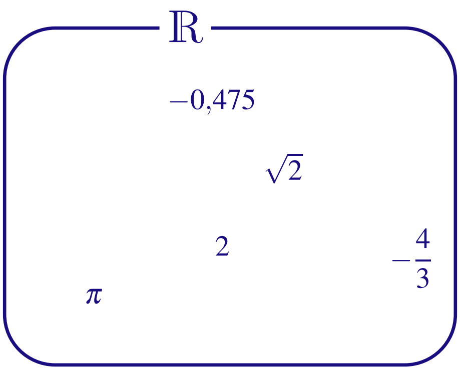


Illustration :



Notations :

- On utilise le symbole $\in$ pour dire qu'un élément appartient à un ensemble.
- On note $3 \in \mathbb{R}$ pour dire que le nombre 3 est un nombre réel.
- Si on veut définir l'ensemble de tous les réels sauf le nombre 3, on peut écrire : $\mathbb{R} - \{3\}$ ou $\mathbb{R} \backslash \{3\}$
- On appelle parfois $\mathbb{R}^*$ l'ensemble de tous les réels privé du nombre 0.
- Pour nommer l'ensemble des nombre réels positifs, on peut écrire : $\mathbb{R}_+$.
- De même, $\mathbb{R}_-$ représente les nombres réels négatifs.

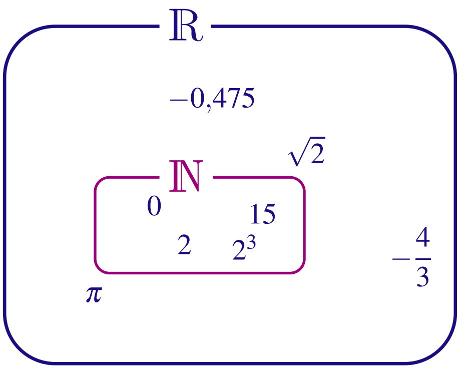
2 L'ensemble $\mathbb{N}$

Définition

L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$.
C'est l'ensemble des nombres positifs qui permettent de compter une collection d'objets.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Illustration :



Notations

- On note $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N} - \{0\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- On utilise $\subset$ pour d'ire qu'un ensemble est inclus dans un autre ensemble.

Exemples

$$245 \in \mathbb{N}; \qquad -5 \notin \mathbb{N}; \qquad 2^5 \in \mathbb{N}; \qquad \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}; \qquad 0 \in \mathbb{N}; \qquad 0 \notin \mathbb{N}^*$$

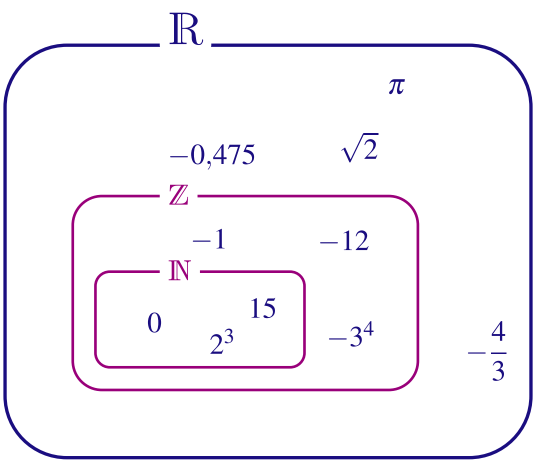
3 L'ensemble $\mathbb{Z}$

Définition

L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$.
Il est composé des nombres entiers naturels et de leurs opposés.

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Illustration



Remarque : L'ensemble $\mathbb{N}$ est *inclus* dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note « $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ».

Utilisation des notations $\in$ et $\subset$

Soit $A = \{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$
On a $-3 \in A$ et $-4 \notin A$
On peut dire que : $A \subset \mathbb{Z}$ donc A est un *sous-ensemble* de $\mathbb{Z}$.

Par contre, $A \not\subset \mathbb{N}$

4 Nombres décimaux $\mathbb{D}$

Les nombres décimaux sont les nombres de la forme $\dfrac{a}{10^n}$, où a est un entier et n un entier naturel.
L'ensemble des *nombres décimaux* est noté $\mathbb{D}$.

Remarque :
- En pratique, ce sont les nombres dont l'écriture décimale n'a qu'un nombre *fini* de chiffres après la virgule.
- Le nombre a étant un entier, il peut être négatif.

Exemples

$0{,}2 = \dfrac{2}{10^1} \in \mathbb{D}\,;$ - $0{,}41 = -\dfrac{41}{10^2} \in \mathbb{D}\,;$ $\dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{10^2} \in \mathbb{D}\,;$ $-13 = \dfrac{-13}{10^0} \in \mathbb{D}\,;$

Démonstration

Le nombre $\dfrac{1}{3}$ appartient-t-il à l'ensemble $\mathbb{D}$?
Procédons à un **raisonnement par l'absurde :**

Le **raisonnement par l'absurde** est une stratégie de démonstration fondamentale en mathématiques.
Elle sert uniquement à prouver qu'une affirmation est **fausse**.
Pour cela, on *suppose* que l'affirmation est vraie et on cherche à obtenir une contradiction.
L'incohérence obtenue prouve que la supposition initiale est fausse.
Attention, le **raisonnement par l'absurde** ne permet pas de prouver qu'une affirmation est vraie. Il serait en effet impossible d'obtenir une contradiction.

Supposons que $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{D}$ (**Hypothèse de départ**)
D'après la définition de $\mathbb{D}$, il existe alors un entier a et un entier naturel n tels que :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$$

$$\iff a = \frac{10^n}{3}$$

Or 10^n n'est pas divisible par 3 (la somme des es chiffres est égale à 1).
Donc $a = \dfrac{10^n}{3}$ n'est pas un entier.
Ce qui est en **contradiction** avec l'hypothèse émise sur a.
On a donc prouvé que :

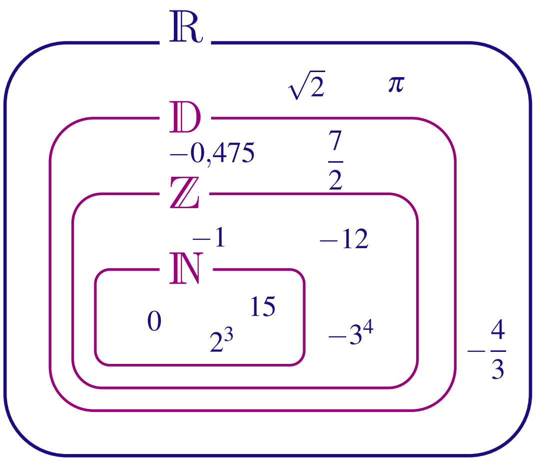
$$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

Remarque :

$\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$ $\frac{3}{3} \in \mathbb{D}$ $0{,}3333333 \in \mathbb{D}$ $\pi \notin \mathbb{D}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{D}$

On a clairement $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$

Illustration



5 Nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Définition :

L'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.
C'est l'ensemble des nombres qui s'écrivent comme le quotient d'un entier par un entier non nul.

Remarques :

— La fraction $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$ est dite *irréductible* lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autres que 1 ou -1).

— La partie décimale d'un nombre rationnel est infinie et périodique à partir d'un certain rang.
Exemple : $\frac{1}{7} \approx 0{,}\underline{142857}\ \underline{142857}\ \underline{142857}\dots$

— La division par 0 est **interdite** : l'écriture $\frac{a}{0}$ n'a aucun sens.

Exemples :

$-13 \in \mathbb{Q}$; $0{,}5 \in \mathbb{Q}$; $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$;

On a clairement $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
mais $\pi \notin \mathbb{Q}$, de même que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration : Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel

Procédons à un raisonnement par l'absurde :
Supposons qu'il existe deux entiers m et p tels que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{p}$
On suppose que $\dfrac{m}{p}$ est une fraction irréductible, donc que m et p sont des nombres premiers entre eux.
Conséquence : m et p ne peuvent pas être tous les deux des nombres pairs.

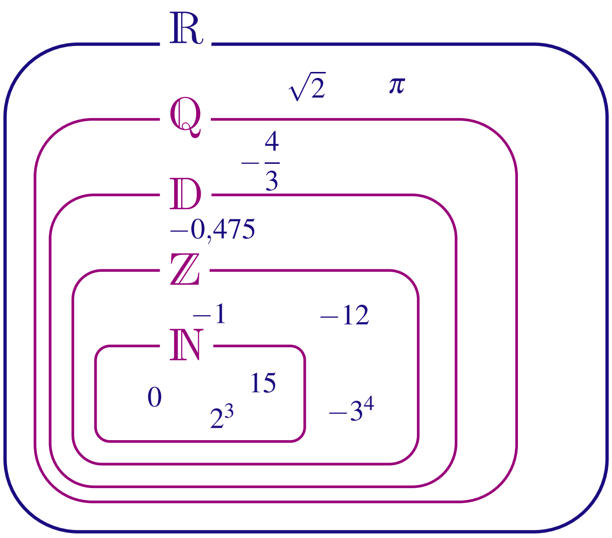
$$\begin{aligned} & \sqrt{2} = \frac{m}{p} \\ \iff \quad & \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{m}{p}\right)^2 \\ \iff \quad & 2 = \frac{m^2}{p^2} \\ \iff \quad & m^2 = 2p^2 \end{aligned} \tag{.1}$$

On en déduit que m^2 est pair. Or si m^2 est pair, alors m est un nombre pair.
(*Démonstration admise, dont une question proche est traitée en arithmétique*)
Si m est un nombre pair, alors il existe un entier k tel que $m = 2k$
Donc : $m^2 = (2k)^2 \iff m^2 = 4k^2$
On a dond d'après (.1) :

$$\begin{aligned} m^2 = 2p^2 \quad & \iff \quad 2p^2 = 4k^2 \\ & \iff \quad p^2 = 2k^2 \end{aligned}$$

On en déduit que p^2 est pair. Or si p^2 est pair, alors p est un nombre pair.
Les deux entiers m et p sont donc tous les deux pairs.
Donc la fraction $\dfrac{m}{p}$ ne peut pas être irréductible comme cela a été supposé. C'est une contradiction.
Il est impossible d'écrire $\sqrt{2} = \dfrac{m}{p}$ sous la forme d' une fraction irréductible.
L'hypothèse de départ est fausse. $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. C'est donc un irrationnel.

Illustration

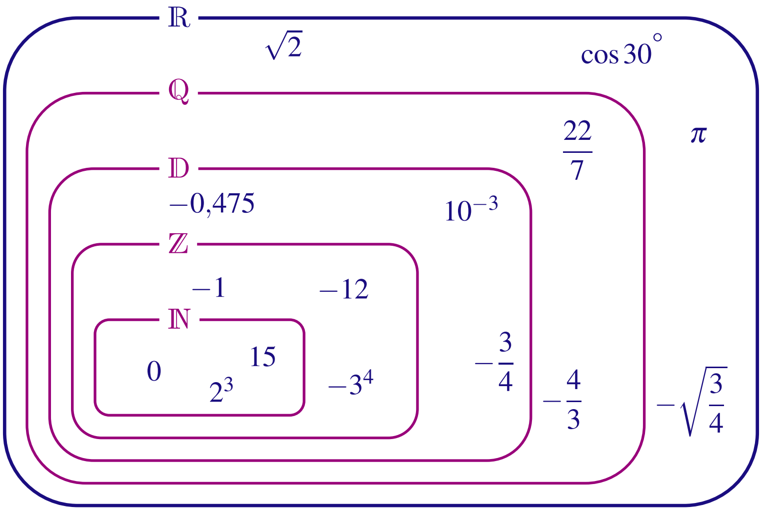


6 Synthèse :

L'ensemble $\mathbb{R}$ comprend donc les nombre entiers, les décimaux, les fractions et les autres nombres (les irrationnels).
En résumé, c'est l'ensemble de tous les nombres connus au collège.

On peut aussi définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble de tous les nombres s tels que $x^2 \geqslant 0$

Bilan :



On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.