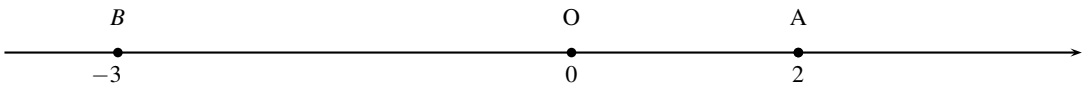
Fonctions de références

I VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

1 POINT DE VUE GÉOMÉTRIQUE

Sur une droite graduée munie d'une origine O et d'une graduation, on considère un point M d'abscisse x.
La valeur absolue de x, notée $|x|$ est le nombre égal à la distance OM.

Exemple :
On considère la droite graduée ci-dessous, d'origine O et dotée des points A et B, d'abscisse respective 2 et -3.



Par application de la définition, $OA = |2|$ et $OB = |-3|$
Comme on sait que $OA = 2$ et $OB = 3$, on en déduit que : $|2| = 2$ et $|-3| = 3$
Comme une distance est positive,

- Si l'abscisse est positive, la valeur absolue de l'abscisse est égale à l'abscisse.
- Si l'abscisse est négative, la valeur absolue de l'abscisse est égale à l'opposé de l'abscisse.

2 POINT DE VUE ALGÉBRIQUE

On appelle valeur absolue d'un réel x, le nombre noté $|x|$ tel que :

- Si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$
- Si $x \leqslant 0$ alors $|x| = -x$

Exemples :

- $A = |4|$, comme $4 > 0$ alors $|4| = 4$ donc $A = 4$
- $B = |-3|$, comme $-3 < 0$, on a $|-3| = -(-3) = 3$ donc $B = |-3| = 3$
- $C = |1-\sqrt{3}|$. Comme $\sqrt{3} > 1$, on a $1-\sqrt{3} < 0$. Donc $C = |1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$
- $D = |x-2|$.
  Si $x > 2$ alors $x-2 > 0$, donc $|x-2| = x-2$
  Si $x < 2$ alors $x-2 < 0$, donc $|x-2| = -(x-2) = -x+2$
  On peut résumer l'écriture de $|x-2$ dans un tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\lvert x-2\rvert$		$-x+2$	0	$x-2$	

3 PROPRIÉTÉS :

- $|0| = 0$,
- Pour tout x réel , on a :
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
  $|x \times y| = |x| \times |y|$

$|x| \geq 0$ $\quad$ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\quad$ $\sqrt{x^2} = |x|$

II FONCTION VALEUR ABSOLUE

1 VARIATIONS

D'après la définition de la fonction f on a : sur $]-\infty;0]$, $f(x) = -x$ et sur $[0;+\infty[$, $f(x) = x$
La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, et strictement croissante sur $[0;+\infty[$

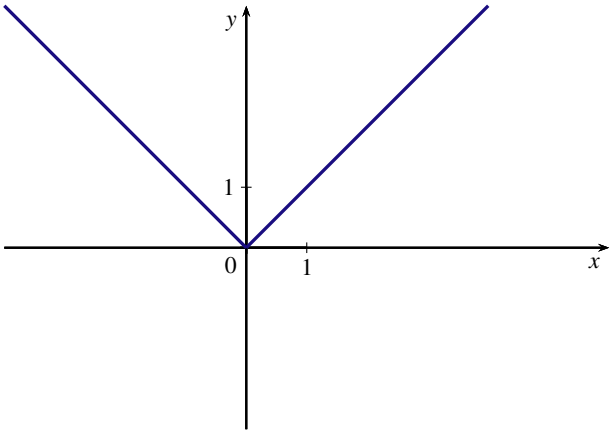
2 TABLEAU DE VARIATIONS

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \|x\|$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3 REMARQUES :

La fonction valeur absolue est une fonction paire.
La courbe de la fonction f admet donc (en repère orthogonal) l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Démonstration :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|-x| = |x|$, donc $f(-x) = f(x)$

4 REPRÉSENTATION GRAPHIQUE :

La courbe de la fonction f coïncide sur $]-\infty\ ;\ 0\ ]$avec la demi droite d'équation $y = -x$ et sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ avec la demi droite d'équation $y = x$.