Les polynômes du second degré

I Définitions

1 – Forme développée

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par . . . . où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

Remarque :

Cette fonction est aussi appelée **fonction trinôme du second degré.**

Exemples :

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 4x^2 - x + 2$ est une fonction polynôme du second degré . . . .
- La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x, ...
- $h(x) = 5x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ n'est pas une fonction polynôme du second degré car . . . .
- La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ . . . .
- $k(x) = 3x^2$ est une fonction polynôme du second degré avec . . . .
- $i(x) = 3x - 5$ n'est pas une fonction polynôme du second degré car elle ne possède pas de terme . . . .

2 – Forme factorisée :

Une fonction f définie par

. . . .

avec $a \neq 0$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, est une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$.

. . . . et. . . . . sont les racines du polynômes, c'est à dire les solutions de l'équation :

. . . .

.

Attention :
Si toute fonction f définie par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a \neq 0$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ peut se développer sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ . . . .

Démonstration dans le chapitre suivant.

APPLICATION :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 9x - 12$.
Montrer que $f(x) = 3(x-4)(x+1)$

Sauf cas favorable (identités remarquables), on ne sait pas encore factoriser un polynôme de degré 2.

3 – FORME CANONIQUE

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad .$$

DÉMONSTRATION :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

APPLICATION :

Déterminer la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Correction :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.
Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 3(x-1)^2 + 1$
Correction :

II VARIATIONS

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire ......
....

1 – DÉMONSTRATION :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Études le cas où $a < 0$

Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$

Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$

Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$

Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$

2 – Tableau de variations avec la forme développée :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

Exemple 1 :

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

3 – Tableau de variations avec la forme canonique

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Exemple 2 :

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$.

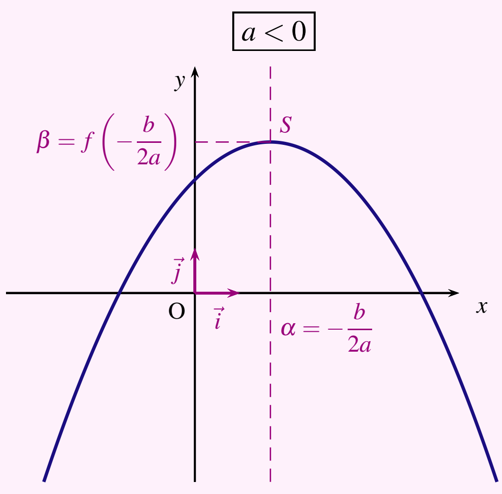
f est une fonction polynôme du second degré sous forme canonique

III COURBE REPRÉSENTATIVE

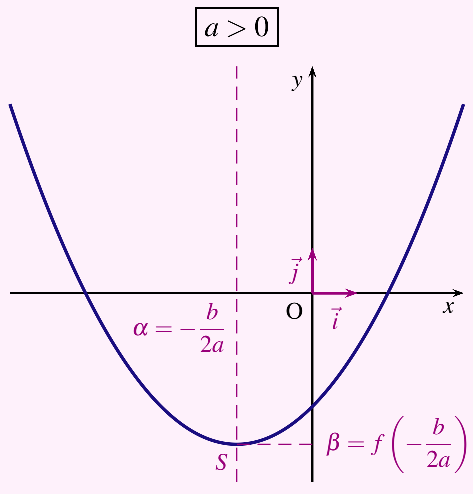
Dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole. On sait que f peut s'exprimer sous forme canonique : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
On peut utiliser : $\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$ pour passer d'une forme à une autre.

On dit que la parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$
Le sommet S de la parabole a pour coordonnées ....

Il correspond au .... ou au .... sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
La parabole a pour axe de symétrie ....



La parabole est tournée vers le bas



La parabole est tournée vers le haut