Les polynômes du second degré

I Définitions

1 – Forme développée

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

Remarque :

Cette fonction est aussi appelée **fonction trinôme du second degré.**

Exemples :

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 4x^2 - x + 2$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 4$, $b = -1$ et $c = 2$.
- La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (2x+1)^2 - 3x$ est une fonction polynôme du second degré car, pour tout réel x, $g(x) = 4x^2 + x + 1$ ($a = 4$, $b = 1$ et $c = 1$)
- $h(x) = 5x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ n'est pas une fonction polynôme du second degré car elle possède un terme en x de degré 3.
- La fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.
- $k(x) = 3x^2$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 3$, $b = 0$ et $c = 0$.
- $i(x) = 3x - 5$ n'est pas une fonction polynôme du second degré car elle ne possède pas de terme en x de degré 2. C'est une fonction affine.

2 – Forme canonique

Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

DÉMONSTRATION :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.
Or pour tout réel x, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$. On en déduit que pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Soit en posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

APPLICATION :

Déterminer la forme canonique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 3x + 2$.
Correction :

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 \times \left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right] \\ &= -2 \times \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - 1\right] \\ &= -2 \times \left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.
Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 3(x-1)^2 + 1$
Correction :

On part de ,

$$\begin{aligned} 3(x-1)^2 + 1 &= 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= 3x^2 - 6x + 3 + 1 \\ &= 3x^2 - 6x + 4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 3(x-1)^2 + 1$

3 – Forme factorisée :

Une fonction f définie par
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
avec $a \neq 0$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, est une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$.

x_1 et x_2 sont les racines du polynômes, c'est à dire les solutions de l'équation :
$$f(x) = 0$$
.

Attention :
Si toute fonction f définie par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$ peut se développer sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ la réciproque n'est pas toujours vraie.
Certains polynômes $f(x)$ de degré 2 ne peuvent pas se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$ et $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$.
Démonstration dans le chapitre suivant.

Application :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 9x - 12$.
Montrer que $f(x) = 3(x - 4)(x + 1)$

Sauf cas favorable (identités remarquables), on ne sait pas encore factoriser un polynôme de degré 2. On ne peut donc pas partir de :

$$\begin{aligned}
3(x-4)(x+1) &= (3x-12)(x+1) \\
&= 3x^2 + 3x - 12x - 12 \\
&= 3x^2 - 9x - 12 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

II Variations

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

1 – Démonstration :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

1. Étudions le cas où $a < 0$

Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$.
(la fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$)
On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2+\beta < a(x_2-\alpha)^2+\beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.
Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$.
(la fonction carré est croissante sur $[0;+\infty[$)
On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2+\beta > a(x_2-\alpha)^2+\beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

Ainsi, si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

2. Étudions le cas où $a > 0$

Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$.
On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2+\beta > a(x_2-\alpha)^2+\beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.
Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$.
On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2+\beta < a(x_2-\alpha)^2+\beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

Ainsi, si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right[$

2 – Tableau de variations avec la forme développée :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

Exemple 1 :

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$
avec $a = -3$, $b = -2$ et $c = 1$.
Ainsi, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{3}$ et $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.
Comme $a < 0$, on en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	

3 – Tableau de variations avec la forme canonique

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Exemple 2 :

Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$.

f est une fonction polynôme du second degré sous forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 2$, $\alpha = 1$ et $\beta = 3$.
Comme $a > 0$, on en déduit que la fonction est décroissante sur $]-\infty;\alpha[$ et croissante sur $]\alpha;+\infty[$
Elle admet un minimum qui vaut $\beta = 3$ On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	

III Courbe représentative

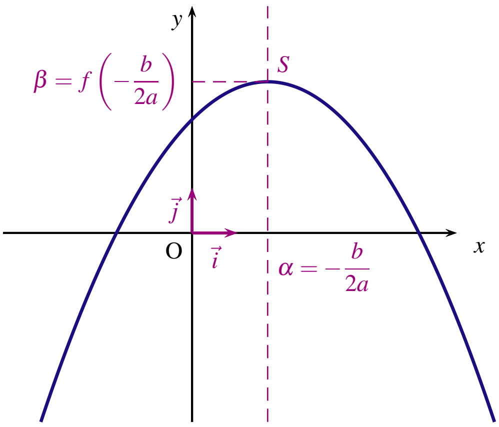
Dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole. On sait que f peut s'exprimer sous forme

canonique :
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
On peut utiliser : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = f(-\dfrac{b}{2a})$ pour passer d'une forme à une autre.

On dit que la parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$
Le sommet S de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha;\beta)$

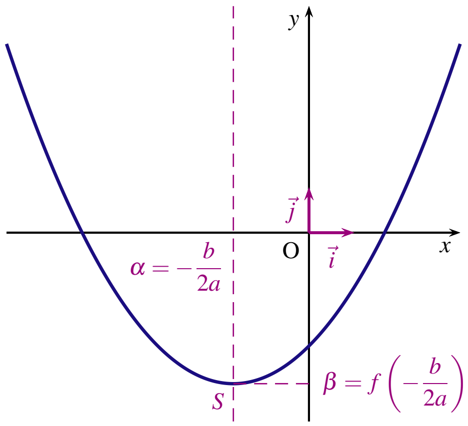
Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$

$\boxed{a < 0}$



La parabole est tournée vers le bas

$\boxed{a > 0}$



La parabole est tournée vers le haut