I DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOI DE PROBABILITÉ

1 VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE : (VIDÉO 1)

Une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs de $\mathbb{R}$ est dite **discrète**.

EXEMPLE 1

On lance deux dés à 6 faces non truqués.
Soit X la variable aléatoire qui vaut la somme des des deux dés.
X est clairement une variable aléatoire discrète puisque ses valeurs sont : $X \in \{2;3;4;\dots;12\}$

EXEMPLE 2

Soit Y la variable aléatoire qui mesure le temps d'attente par exemple à une caisse de supermarché. On estime que le temps maximum est de 30 minutes.
Si on regroupe les réponses par minutes, on obtient un nombre fini de valeurs pour Y. En effet, $X \in \{0;1;2;3;4;\dots;30\}$
Si on souhaite être plus précis, et prendre le temps exact d'attente, il est toujours possible de trouver une valeur entre deux autres et ainsi la variable aléatoire Y peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0;30]$.
Cette variable n'est plus discrète.

Une variable aléatoire pouvant prendre toute valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite **continue**.

REMARQUE

Il n'y aura plus la possibilité de calculer des probabilités du type $p(Y=k)$ car cela reviendrait à calculer par exemple, la probabilité qu'une personne attende 12 minutes 14 secondes et 13 centièmes à la caisse. Cela donne $p(Y=k)=0$
Avec les variables aléatoires continues, on calculera :$p(Y \leqslant k)$ ou $p(Y > k)$ ou $p(k_2 \leqslant Y \leqslant k_1)$ où Y est définie sur un intervalle.

2 FONCTION DE DENSITÉ (VIDÉO 2)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle fonction de densité de probabilité sur I toute fonction f définie, continue et positive sur I telle que l'intégrale de f sur I soit égale à 1.

EXEMPLE

Vérifions que la fonction f définie pour tout réel t de l'intervalle $[0;10]$ par

$$f(t) = 0{,}003t^2$$

est une fonction de densité de probabilité sur $[0;10]$.

- La fonction f est dérivable sur $[0;10]$ donc continue.
- On a aussi $f(t) \geqslant 0$ sur $[0;10]$
- Une primitive de la fonction f est la fonction F définie sur sur $[0;10]$ par $F(t) = 0{,}003\dfrac{x^3}{3}$ d'où

$$\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{10} 0{,}003t^2 \;\; \mathrm{d}t = F(10) - F(0) = 0{,}003\frac{10^3}{3} - 0{,}003\frac{0^3}{3} = 1$$

Ainsi, f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1{,}5]$

3 LOI DE PROBABILITÉ (VIDÉO 3)

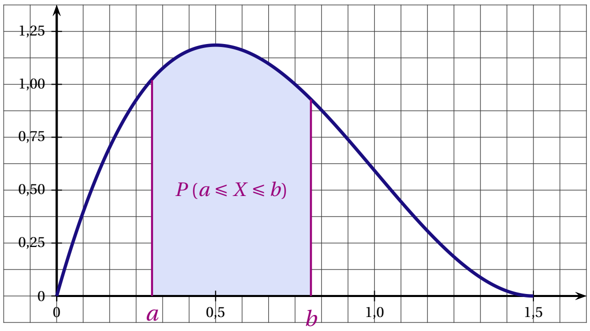
Soit f une fonction de densité de probabilité sur un intervalle I.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle I lorsque, pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans I, la probabilité de l'événement $X \in [a; b]$ est :

$$P(X \in [a; b]) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

REMARQUE

$P(a \leqslant X \leqslant b)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

EXEMPLE :
On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction de densité de probabilité définie sur $[0; 1,5]$.



On observe sur cet exemple, que la fonction f prend des valeurs supérieures à 1 sur l'intervalle $[0; 1,5]$: c'est possible car $f(x)$ n'est pas une probabilité, c'est densité de probabilité.

PROPRIÉTÉS

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f sur un intervalle I.
Pour tous réels a et b appartenant à I

1. $P(X = a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
2. $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$
3. $P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a)$

4 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE (VIDÉO 4)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité f sur l'intervalle $[a; b]$, alors l'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X) = \int_a^b t \times f(t)\,\mathrm{d}t$$

EXEMPLE

Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire X mesurant la durée en minutes du temps d'attente d'un métro d'une grande ville, dont la fonction de densité f est définie sur $[0; 10]$ par

$f(t) = 0{,}003t^2$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{10} t \times 0{,}003t^2 \ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{10} 0{,}003t^3 \ \mathrm{d}t \\ &= \left[0{,}003\frac{t^4}{4}\right]_0^{10} \\ &= 0{,}003 \times \frac{10^4}{4} \\ &= 7{,}5 \end{aligned}$$

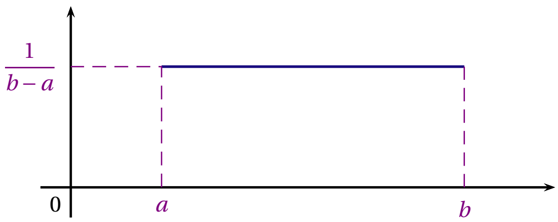
Le temps d'attente moyen d'un métro de 7,5 minutes, soit 7 minutes et 30 secondes.

II LOI UNIFORME (VIDÉO 5)

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$.

REMARQUE



La fonction f définie sur $[a;b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a;b]$:

- f est continue et positive sur $[a;b]$.
- $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = 1.$

2 PROPRIÉTÉ

X est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
Pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans $[a;b]$, $P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

✼ DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} P(c \leqslant X \leqslant d) &= \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{b-a}\right]_c^d \\ &= \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a} \end{aligned}$$

3 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE (VIDÉO 6)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$ est le réel

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

✼ DÉMONSTRATION

Par définition :

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

EXEMPLE

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$.

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes ?
3. Quel est le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique ?

Solution

La variable aléatoire T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$, donc la densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0{,}5;9{,}5]$ par $f(t) = \dfrac{1}{9{,}5-0{,}5} = \dfrac{1}{9}$.

Le temps d'attente T, en minutes, auprès du standard téléphonique du service après vente d'une entreprise suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0{,}5;9{,}5]$.

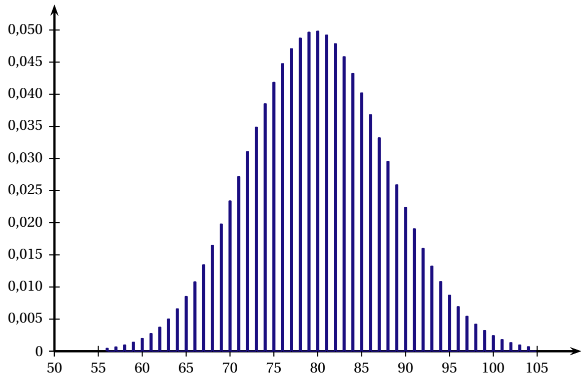
1. La probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 2 minutes est $P(X \leqslant 2) = \dfrac{2-0{,}5}{9} = \dfrac{1}{6}$.
2. La probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 3 minutes est $P(X \geqslant 3) = \dfrac{9{,}5-3}{9} = \dfrac{13}{18}$.
3. L'espérance mathématique de T est $E(T) = \dfrac{0{,}5+9{,}5}{2} = 5$.
   Le temps d'attente moyen auprès du standard téléphonique est de 5 minutes.

III LOI NORMALE

1 VERS UNE APPROXIMATION DE LA LOI BINOMIALE (VIDÉO 7)

RAPPEL

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathscr{B}(n;p)$.
L'espérance mathématique est $E(X) = np$



Loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}2$

La « courbe en cloche » est la courbe représentative de la fonction de Gauss.
Quand n est de plus en plus grand, les aires des rectangles deviennent de plus en plus proches des aires correspondantes limitées par la courbe représentant la fonction de Gauss.

2 LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE (VIDÉO 8)

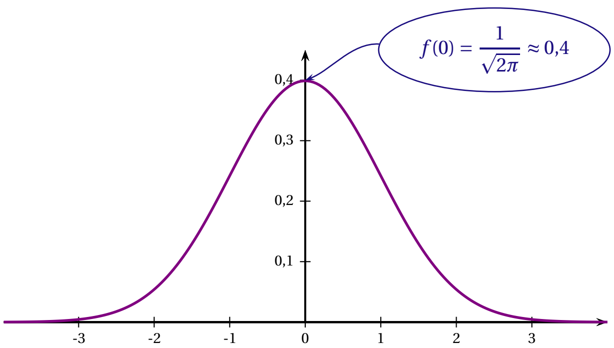
DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Cette fonction n'est pas à connaître par cœur. Ouf!!
Elle est trop complexe pour qu'on puisse travailler avec. On utilisera la calculatrice ou des résultats de cours pour tous les calculs.

COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la densité f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



ESPÉRANCE ET ÉCART-TYPE DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

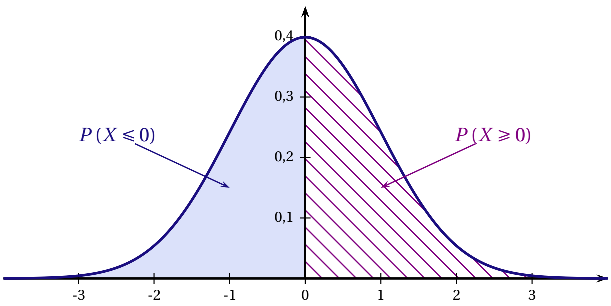
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a :

$$E(X) = 0 \text{ et } \sigma(X) = 1.$$

PROPRIÉTÉ (VIDÉO 9)

La courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, donc les mesures des aires égales aux probabilités $P(X \leqslant 0)$ et $P(X \geqslant 0)$ sont égales, d'où $P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0)$.
Comme $P(X \leqslant 0) + P(X > 0) = 1$, on en déduit que

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$



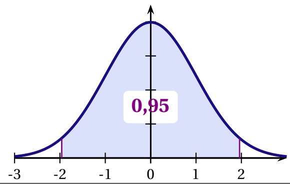
Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ on a :

$$P(X \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$$

INTERVALLE ASSOCIÉ À UNE PROBABILITÉ DONNÉE

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ alors :

$$P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$$

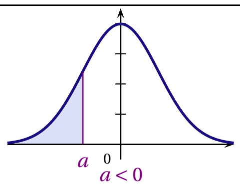
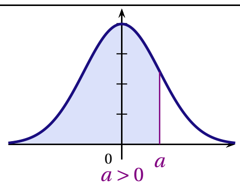
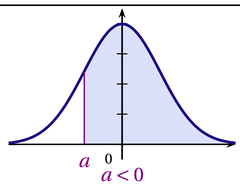
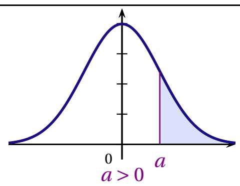


CALCULS (VIDÉO 10)

Il n'est pas possible de déterminer les primitives de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On peut néanmoins calculer des valeurs approchées des intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$ par des méthodes numériques, disponibles dans les calculatrices et permettant d'obtenir directement des valeurs approchées de certaines probabilités liées à la loi normale.

Du fait de la symétrie de la courbe de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, pour calculer $P(X \leqslant a)$ ou $P(X \geqslant a)$, on peut utiliser la méthode suivante :

Probabilité	$P(X \leqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \leqslant a)$ avec $a > 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a < 0$	$P(X \geqslant a)$ avec $a > 0$
Graphique				
Calcul	$0{,}5 - P(a < X < 0)$	$0{,}5 + P(0 < X \leqslant a)$	$0{,}5 + P(a \leqslant X < 0)$	$0{,}5 - P(0 < X < a)$

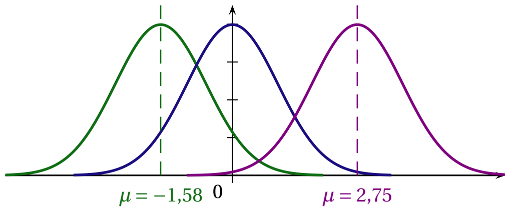
3 LOI NORMALE (VIDÉO 11)

DÉFINITION

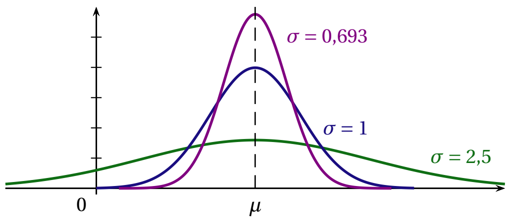
Soit μ un réel et σ un réel strictement positif. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, signifie que la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On note : X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu;\sigma^2\right)$.

REMARQUES :

- La valeur $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ n'est pas à connaître. L'idée est de dire qu'à partir de la loi normale centrée et réduite, on peut définir d'autres lois normales. Les allures de courbes restent les mêmes (courbe en cloche). Selon les valeurs des paramètres μ et σ la courbe sera plus ou moins décalée de l'origine, et plus ou moins haute.
- Si X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors sa variance $V(X)=\sigma^2$.
- L'espérance μ de la loi normale est un paramètre de position : la courbe représentative de la fonction de densité admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x=\mu$.



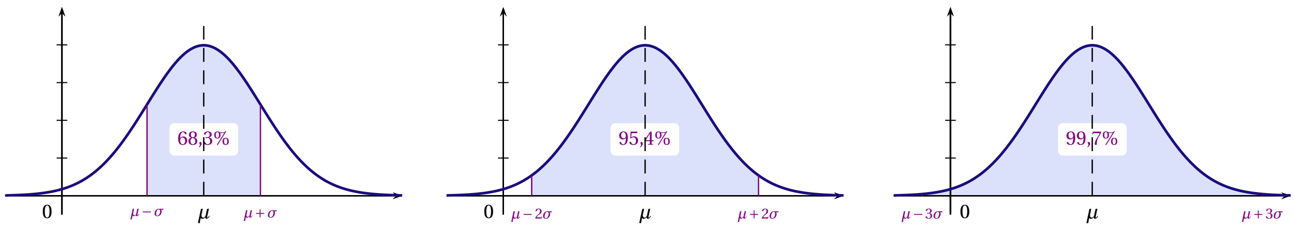
- L'écart-type $\sigma>0$ de la loi normale est un paramètre de dispersion : plus σ est élevé, plus les réalisations de X sont dispersées autour de μ, et plus la courbe est "étalée".



INTERVALLES DE FLUCTUATION D'UNE LOI NORMALE (VIDÉO 12)

Si la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ alors :

- $P\left(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma\right)\approx 0{,}683$.
- $P\left(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma\right)\approx 0{,}954$.
- $P\left(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma\right)\approx 0{,}997$.



$X\in\left[\mu-\sigma;\mu+\sigma\right]$ $X\in\left[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma\right]$ $X\in\left[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma\right]$

LOI NORMALE ET CALCULATRICES (VIDÉO 13)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. Les calculatrices disposent de commandes permettant de calculer :

1. $P(a\leqslant X\leqslant b)$
2. Le réel k tel que $P(X\leqslant k)=\alpha$ avec $\alpha\in]0;1[$

Commandes spécifiques des calculatrices :

	Sur TI	Sur Casio
Menu	2nde puis sur la touche $\overset{\text{distrib}}{\text{var}}$	OPTN puis STAT DIST NORM
$P(a \leqslant X \leqslant b)$	`normalFrep`(a,b,μ,σ) ou `normalCdf`(a,b,μ,σ) borninf : a ; bornsup : b puis, renseigner μ et σ	Ncd `normCD`(a,b,σ,μ) Lower : a ; Upper : b puis, renseigner σ et μ
$P(X \leqslant k) = \alpha$	`FracNormale`(α,μ,σ) ou `invNorm`(α,μ,σ) aire : α puis, renseigner μ et σ	InvN `InvNormCD`(α,σ,μ) Area : α puis, renseigner σ et μ

EXEMPLE

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(125;20{,}25)$ d'espérance $\mu = 125$ et d'écart-type $\sigma = 4{,}5$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

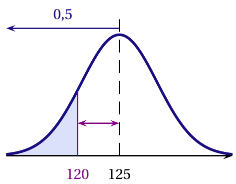
1. Déterminer les probabilités suivantes :
   $P(122 \leqslant X \leqslant 128)$; $P(X \leqslant 120)$; $P(X \leqslant 129{,}5)$; $P(X \geqslant 130{,}4)$; $P(X \geqslant 118{,}7)$.
2. Déterminer le réel a tel que $P(X \leqslant a) = 0{,}871$.
3. Déterminer le réel b tel que $P(X \geqslant b) = 0{,}02$.
4. Déterminer un intervalle I de centre 125 tel que $P(X \in I) = 0{,}81$.

Rédaction :

1. a) À l'aide de la calculatrice on trouve $P(122 \leqslant X \leqslant 128) \approx 0{,}495$.

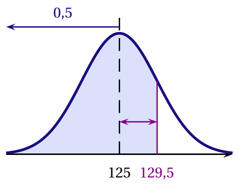
   b)

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 120) &= P(X \leqslant 125) - P(120 < X \leqslant 125) \\ &= 0{,}5 - P(120 < X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}133 \end{aligned}$$



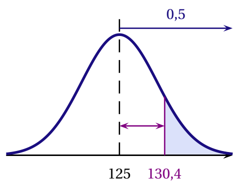
   c)

$$\begin{aligned} P(X \leqslant 129{,}5) &= P(X \leqslant 125) + P(125 < X \leqslant 129{,}5) \\ &= 0{,}5 + P(125 < X \leqslant 129{,}5) \\ &\approx 0{,}841 \end{aligned}$$



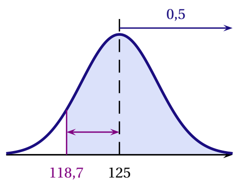
   d)

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 130{,}4) &= P(X \geqslant 125) - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &= 0{,}5 - P(125 \leqslant X < 130{,}4) \\ &\approx 0{,}115 \end{aligned}$$



   e)

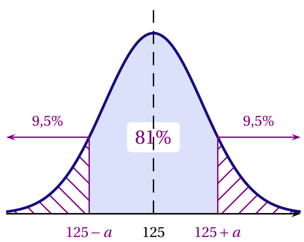
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 118{,}7) &= P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) + P(X > 125) \\ &= 0{,}5 + P(118{,}7 \leqslant X \leqslant 125) \\ &\approx 0{,}919 \end{aligned}$$



2. Avec la calculatrice, $P(X \leqslant a) = 0{,}871$ pour $a \approx 130{,}09$.
3. La calculatrice permet de résoudre l'équation $P(X \leqslant k) = \alpha$ avec $\alpha \in]0;1[$. Or

$$P(X \geqslant b) = 0{,}02 \iff 1 - P(X < b) = 0{,}02 \iff P(X < b) = 0{,}98$$

   Soit en utilisant la calculatrice $b \approx 134{,}242$.
4. Un intervalle I de centre 125 est de la forme $[125 - a; 125 + a]$ où a est un réel positif.
   On cherche donc le réel a tel que $P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81$.
   La courbe de la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}\left(125;4{,}5^2\right)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 125$.
   On en déduit que :



$$\begin{aligned} P(125 - a \leqslant X \leqslant 125 + a) = 0{,}81 &\iff 1 - 2 \times P(X < 125 - a) = 0{,}81 \\ &\iff P(X < 125 - a) = \frac{1 - 0{,}81}{2} = 0{,}095 \end{aligned}$$

   Soit en utilisant la calculatrice $125 - a \approx 119{,}102$ d'où $a \approx 5{,}898$ et $125 + a \approx 130{,}898$.
   Donc $I = [119{,}102; 130{,}898]$ (ou avec les bornes de l'intervalle arrondies à 10^{-1} près, $I = [119{,}1; 130{,}9]$)