CORRECTION DU DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 — 5 points

1. *Déterminer $f'(0)$.*
On lit sur la représentation graphique de f, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est horizontale.
Le coefficient directeur de l'équation de la tangente est donc nul, on en déduit que $f'(0) = 0$.

2. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. En déduire la valeur de $f'(-2)$.*
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(-2;0)$ passe par le point $M(-3;3)$.
On cherche donc une équation de la droite (AM) :
Soit m son coefficient directeur, on sait que : $m = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{3-0}{-3+2} = -3$
Une équation de la droite (AM) est donc de la forme : $y = -3x + b$
Pour déterminer b, on utilise que $A(-2;0) \in (AM)$, ce qui implique que : $0 = -3 \times (-2) + b \iff b = -6$
Il vient que $(AM) : y = -3x - 6$

3. *Peut-on en affirmer que $f'(-1) > f'(1)$?*
On observe que f est décroissante sur $]-\infty;0]$, ce qui est équivalent à dire que pour tout $x \in]-\infty;0]$, $f'(x) < 0$.
Il en résulte que $f'(-1) < 0$.
On observe inversement que f est croissante sur $[0;+\infty[$, ce qui est équivalent à dire que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) > 0$, ce qui implique que $f'(1) > 0$.
On a donc montré : $f'(1) > 0 > f'(-1)$ ce qui infirme le proposition de l'énoncé.

Exercice 2 — 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x - 3$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. *Calculer $f'(x)$*
En appliquant les résultats de cours sur lé dérivée d'un polynôme, on obtient :

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 18$$

2. *En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$*
f' étant un polynôme du second degré, nous allons étudier son signe, en calculant son discriminant :
$f'(x) = 3x^2 - 3x - 18$, on a donc $f'(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$; $b = -3$ et $c = -18$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 3 \times (-18) = 225 = 15^2 > 0$
f' admet donc deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+15}{6} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-15}{6} = -2$$

Comme f' est du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur de ses racines, il vient :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	19	↘	$-\dfrac{87}{2}$	↗	

$f(-2) = (-2)^3 - \dfrac{3}{2} \times (-2)^2 - 18 \times (-2) - 3 = -8 - 6 + 36 - 3 = 19$ et $f(3) = 3^3 - \dfrac{3}{2} \times 3^2 - 18 \times 3 - 3 = -\dfrac{87}{2}$

3. *Déterminer une équation de tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.*
On sait qu'une équation de tangente à $\mathscr{C}$, au point $N(a; f(a)$ est donnée par la relation de cours :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \qquad (1)$$

L'énoncé nous donne $a = 0$, on calcule donc : $f(0) = -3$ et $f'(0) = -18$
$(1) \iff y = -18(x-0) - 3 \iff y = -18x - 3$
Une équation de tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est donc : $(T) : y = -18x - 3$

Exercice 3 3 points

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ puis par la relation, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}$$

1. *Calculer u_1 et u_2.*
   D'après la relation de récurrence donnée dans l'énoncé :
   $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{3}{2} = -1$
   $u_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times (-1) - \frac{3}{2} = -2$
2. *A la calculatrice, et sans justifier, déterminer u_{10}* On trouve : $u_{10} = 2{,}9921875$

Exercice 4 2 points

Quelle est la valeur de la variable n en fin de programme ?

```
U ← 2
n ← 0
Tant que U < 8
        U ← 3/2 × U
        n ← n+1
Fin de Tant que
```

n	U
0	2
1	3
2	$\frac{9}{2}$
3	$\frac{27}{4} = 6{,}75$
4	$\frac{81}{8} = 10{,}125$

Quand $n = 3$, on a encore $U = 6{,}75 < 8$,

par contre pour $n = 4$, on a $U = 10{,}125 > 8$.

On sort donc de la boucle pour $n = 4$

Exercice 5 5 points

- La suite (u_n) est-elle une suite arithmétique ?
  Si (u_n) est une suite arithmétique alors il existe un réel r, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$
  On calcule donc $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3$
  On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$
  (u_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = 3$
- La suite (v_n) est-elle une suite arithmétique ?
  On calcule $v_0 = 0^2 - 1 = -1$, puis $v_1 = 1^2 - 1 = 0$, puis $v_2 = 2^2 - 1 = 3$
  Comme $v_2 - v_1 = 3 - 0 = 3$ et que $v_1 - v_0 = 0 - (-1) = 1$, on montre par ce contre exemple, qu'il n'existe pas de réel r vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
  On en déduit que (v_n) n'est pas une suite arithmétique.