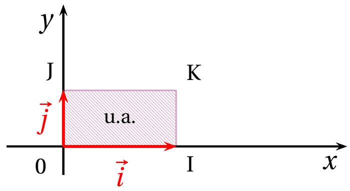
I INTÉGRALE ET AIRE : VIDÉO 1

1 UNITÉ D'AIRE

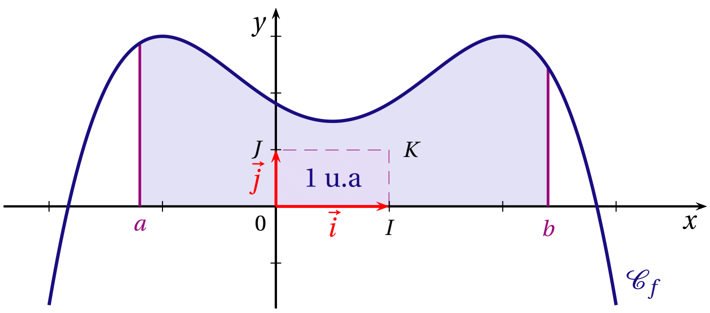
Soit $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ un repère orthogonal du plan.
L'unité d'aire, notée u.a, est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec I(0; 1), J(0; 1) et K(1; 1).



2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}_f$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$
Ce nombre est noté : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



REMARQUES

— $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

— Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

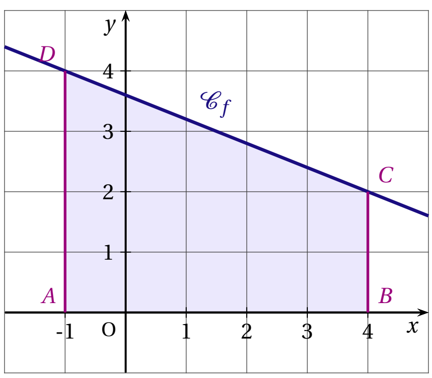
— La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b :
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

— $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$, car le domaine $\mathscr{D}_f$ est alors réduit à un segment.

EXEMPLES : (vidéo 2)

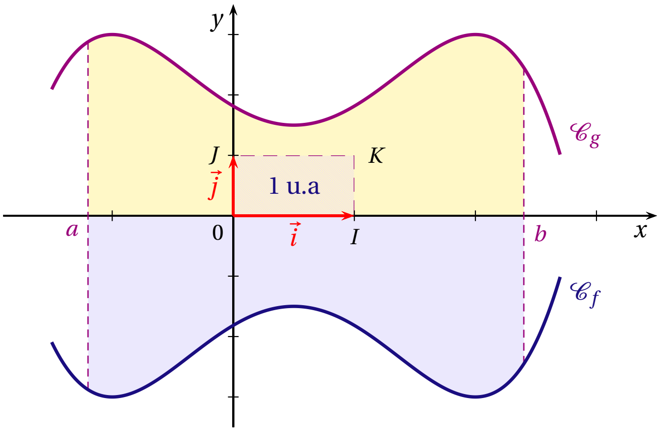
Calculons $\displaystyle\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$.
La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x)=-0{,}4x+3{,}6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$
L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire du trapèze $ABCD$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 (-0{,}4x+3{,}6)\,\mathrm{d}x &= \frac{(AD+BC)\times AB}{2}\\ &= \frac{(4+2)\times 5}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$



3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET NÉGATIVE : (VIDÉO 3)

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a;b]$ par $g=-f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathcal{A}$$

4 FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE : (VIDÉO 4)

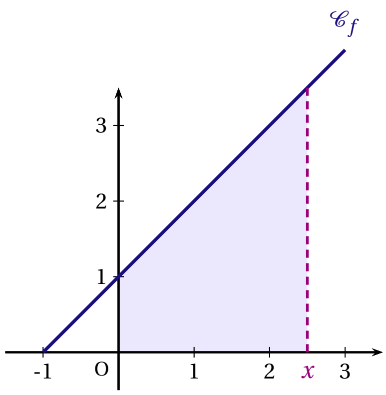
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a;b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

THÉORÈME (*admis*)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;4]$ par $f(x)=x+1$.
Si x est un réel de l'intervalle $[0;4]$, la fonction F définie par $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du trapèze colorié.



On rappelle (!!) :

$$\mathcal{A}_{trapèze} = \frac{(petite\ base + grande\ base) \times hauteur}{2}$$

On a donc $F(x)=\dfrac{((x+1)+1)\times x}{2}=\dfrac{x^2+2x}{2}$ La fonction F est dérivable sur $[0;4]$ et $F'(x)=\left(\dfrac{x^2+2x}{2}\right)'=x+1=f(x)$.

II PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE : (VIDÉO 5)

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I, $F'(x)=f(x)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5-3x$
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-\frac{3}{2}x^2+5x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=-\frac{3}{2}x^2+5x-2$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

De façon générale, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=-\frac{3}{2}x^2+5x+c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

PROPRIÉTÉ (*admise*)

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

THÉORÈME

Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x)=F(x)+k$ où k est un réel.

3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE CONDITION

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

EXEMPLE
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5-3x$.
Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(2)=0$
On a montré que les primitives de f étaient sous la forme : $F(x)=-\frac{3}{2}x^2+5x+c$
On veut que $F(2)=0$ donc $-\frac{3}{2}\times 4+10+c=0 \iff c=-4$
D'où : $F(x)=-\frac{3}{2}x^2+5x-4$

III CALCUL DE PRIMITIVES

1 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES (VIDÉO 6)

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...	Validité
$f(x)=a$ (a est un réel)	$F(x)=ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	sur $]0;+\infty[$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x$	sur $\mathbb{R}$

2 LINÉARITÉ (VIDÉO 7)

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2-\dfrac{3}{x}$.

La fonction u définie par $u(x)=x^2$ admet comme primitive la fonction U définie par $U(x)=\dfrac{x^3}{3}$.

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ admet pour primitive la fonction $x\mapsto\ln x$. Donc sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction v définie par $v(x)=-\dfrac{3}{x}$ admet comme primitive la fonction V définie par $V(x)=-3\ln x$.

Donc la fonction $f=u+v$ admet comme primitive la fonction $F=U+V$ définie par $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-3\ln x$.

3 PRIMITIVES DES FORMES USUELLES (VIDÉO 8)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.

Fonction f	Une primitive F est donnée par…
$f=u'u$	$F=\dfrac{1}{2}u^2$
$f=u'u^n$ n entier, $n>0$	$F=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$f=u'\mathrm{e}^u$	$F=\mathrm{e}^u$
$f=\dfrac{u'}{u^2}$ u ne s'annule pas sur I	$F=-\dfrac{1}{u}$

EXEMPLE (vidéo 9)

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{1-x^2}$ telle que $F(1)=0$.
Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x)=1-x^2$ alors $u'(x)=-2x$.
On a : $f(x)=-\dfrac{1}{2}\times(-2x)\times\mathrm{e}^{1-x^2}$ soit $f=-\dfrac{1}{2}\times u'\mathrm{e}^u$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x, par $F(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}+c$ où c est un réel à déterminer.
Or $F(1)=0 \iff -\dfrac{1}{2}+c=0 \iff c=\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, la primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{1-x^2}+\dfrac{1}{2}$.

IV INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION (VIDÉO 10)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a;b]$.
L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b)-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

REMARQUES

- La différence $F(b)-F(a)$ se note $\Big[F(x)\Big]_a^b$; ainsi $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$.
- Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.
  En effet, si G est une autre primitive de f sur I, il existe un réel k tel que $G(x)=F(x)+k$ d'où

$$G(b)-G(a)=(F(b)+k)-(F(a)+k)=F(b)-F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

EXEMPLE

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}}\left(x-\frac{1}{x}+\frac{\mathrm{e}}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}-\ln(x)-\frac{\mathrm{e}}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= \left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\ln(\mathrm{e})-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\ln(1)-\frac{\mathrm{e}}{1}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}+\mathrm{e}-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

2 UTILISATION DE LA CALCULATRICE (VIDÉO 11)

Calculer une valeur approchée de : $\int_{0.5}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Méthode :

1. On représente graphiquement la fonction à l'écran, en choisissant bien une fenêtre adaptée aux bornes de l'intégrale.
2. On appuie sur $Gsolv$, touche $F5$
3. On sélectionne le triangle, touche $F6$ pour élargir le menu.
4. On choisis la touche "intégrale", $F3$
5. On commence par entrer la borne inférieure, "*lower*".
6. Puis la borne supérieure, "*upper*".

La calculatrice affiche :

$$\int_{0.5}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}29$$

3 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS (VIDÉO 12)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a)-F(a) = 0$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve :
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a) \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a)-F(b)$$

V PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1 POSITIVITÉ (VIDÉO 13)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Attention la réciproque est fausse :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{3} \left(-x^2+3x+1\right)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-2}^{3}\\ &= \left(-9+\frac{27}{2}+3\right)-\left(\frac{8}{3}+6-2\right)=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ mais $f(-1) = -3$.

On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I.
Si $a \leqslant b$ et $f \leqslant 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

2 LINÉARITÉ (VIDÉO 14)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I, et pour tout réel α

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

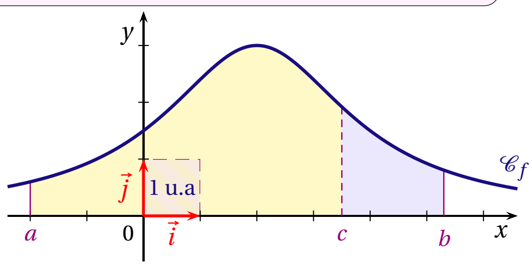
3 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$.



4 ORDRE (VIDÉO 15)

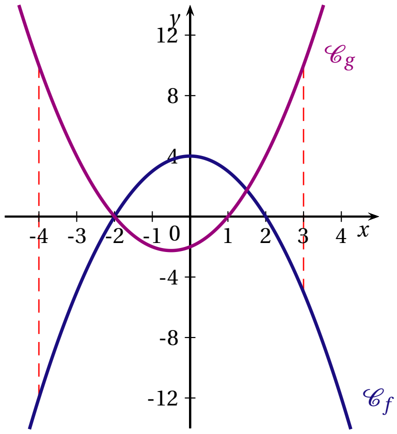
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leqslant b$.
Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

✳ DÉMONSTRATION

Si pour tout réel x appartenant à $[a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leqslant 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, la fonction $f - g$ est continue sur $[a;b]$.
Par conséquent, si $a \leqslant b$ et $f - g \leqslant 0$ alors

$$\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0 \iff \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Attention la réciproque est fausse :
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.



Ainsi, $\displaystyle\int_{-4}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$
mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x) \leqslant g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.

VI INTÉGRALE ET MOYENNE

1 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE (VIDÉO 16)

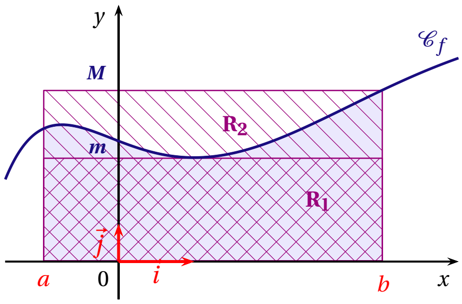
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$). Soit m et M deux réels.
Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, alors :

$$m \times (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \times (b-a)$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :
R_1 de côtés m et $b-a$;
R_2 de côtés M et $b-a$.



2 VALEUR MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).
On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b-a$.