

Exercice 3

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

1. a. Ce graphe est connexe, car on peut relier n'importe quelle paire de sommets par une chaîne.

Cherchons les degrés de chaque sommet.

Sommet	A	B	C	M	N	W
Degré	2	2	4	3	3	4

D'après le théorème d'Euler, un graphe connexe contient une chaîne eulérienne si et seulement si il possède 0 ou 2 sommets de degrés impairs. Ce graphe a exactement deux sommets de degrés impairs, N et M; il existe donc un trajet qui permet à Alexis d'emprunter chaque liaison aérienne une et une seule fois, en partant de N et en arrivant à M, ou le contraire.

- b. Un exemple d'un tel trajet : NB – BC – CW – WN – NM – MW – WA – AC – CM.

2. Utilisons l'algorithme de Dijkstra pour relier Boston à Miami par le chemin le moins cher.

Sommets	A	B	C	M	N	W
Départ	∞	0	∞	∞	∞	∞
B(0)	∞		130–B	∞	170–B	∞
C(130)	130 + 100 230–C			130 + 150 280 – C	170 – B	130 + 120 250 – C
N(170)	230–C			280 – C		250 – C
A(230)				280 – C		250 – C
W(250)				280 – C		

Le trajet le moins cher pour aller de Boston à Miami coûte 280 € et c'est B – C – M.

3. a. La matrice d'adjacence du graphe est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b. Alexis veut aller de A à B en, au plus, 3 étapes; on regarde donc successivement les coefficients de la première ligne (sommet A) et deuxième colonne (sommet B) pour les matrices P , P^2 et P^3 :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad P^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 7 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 7 & 4 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 6 & 3 & 7 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

- $p_{12} = 0$; il n'y a donc pas de vol direct entre A et B;
- $p_{12}^{(2)} = 1$; il y a donc exactement 1 trajet en 2 vols entre A et B : A – C – B
- $p_{12}^{(3)} = 2$; il y a donc exactement 2 trajets en 3 vols entre A et B : A – W – C – B et A – W – N – B.

Il y a donc 3 trajets possibles pour relier A à B; ce sont A – C – B, A – W – C – B et A – W – N – B.