Activités d'introduction : : Exercice 25 p 86
Fonction exponentielle de base q : Exercice 25 p 86 puis exercices 24 et 30 p 86

Propriétés algébriques de la fonction e^x : Exercice 31 ; 32 ; 33 ; 37 et 38 p 86

Résolution d'équations t d'inéquations avec la fonction e^x : Exercice 44 ; 45 ; 33 ; 52 ;53 ;54 p 87

Variations de la fonction e^x : Exercices (question a) : 59 ; 60 ; 62 ; 64 ; 67 p 88 puis exercice 70 p 88

Variations de la fonction $e^{u(x)}$: Exercice 72 p 88

Etudes de foncions Exercices : 78 ; 80 ; 83 p 89 Exercice 77-78 p 142 (*attention à la page*)

Annales Bac Exercices : 88 ; 91 p 91

EXERCICE 1

(*D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017*)

PARTIE A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1;25]$ par $f(x) = 10 - \dfrac{e^{0,2x+1}}{x}$.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

$f(x) : 10 - e\hat{}(0.2x+1)/x$
$x \to 10 - \dfrac{\exp(0.2x+1)}{x}$
factoriser(deriver($f(x)$))
$\dfrac{\exp(0.2x+1)*(1-0.2x)}{x^2}$
factoriser (deriver(deriver($f(x)$)))
$\dfrac{\exp(0.2x+1)*(-x^2+10x-50)}{25x^3}$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1;25]$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1;25]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$.
   a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1;5]$.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5;25]$.
   c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α.
   d) En utilisant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, justifier que la fonction f est concave sur l'intervalle $[1;25]$.

PARTIE B

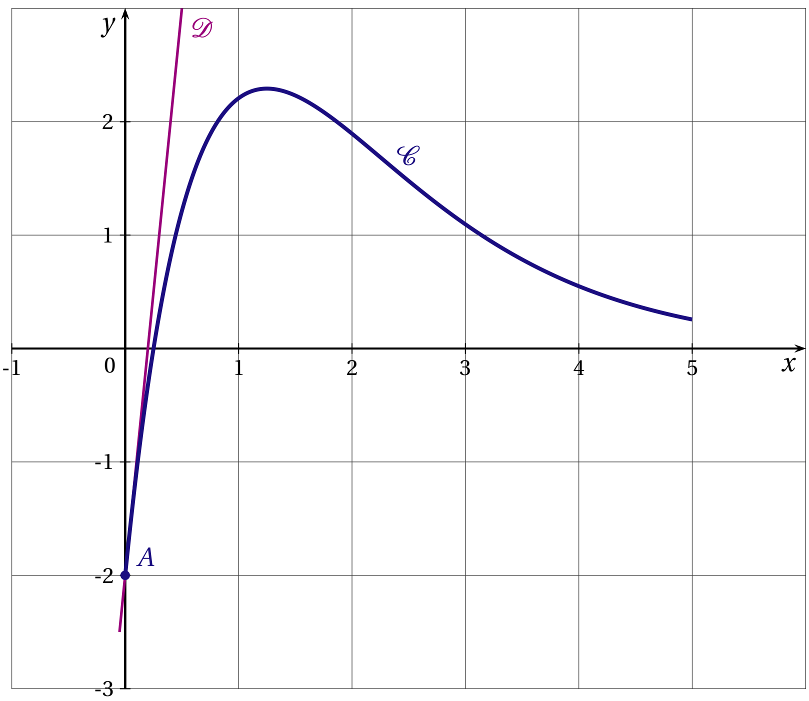
Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail. On s'intéresse au bénéfice réalisé, en millier d'euros, correspondant à la production d'une quantité de x dizaines de tonnes d'aliments.
On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la fonction f étudiée dans la partie A ci-dessus.
La production minimale est de 10 tonnes, ainsi $x \geqslant 1$.
Les réponses aux questions suivantes seront justifiées grâce à la partie A.

1. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société ?
   Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?
2. Déterminer, à la tonne près, la quantité maximale d'aliments qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice.

EXERCICE 2

(*D'après sujet bac Polynésie 2017*)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = (ax-2)\mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel.
On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;5]$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0;-2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x-2$.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax+a+2)\mathrm{e}^{-x}$$

   b) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

   c) Donner l'expression de $f'(x)$.
3. a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$. On pourra faire un tableau.

   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

   c) Résoudre sur l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8*x+10)*\exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x+10)\,\mathrm{e}^{-x}$
2	Dériver $\left[g(x),x\right]$ $\rightarrow (8*x-18)*\exp(-x)$
3	Résoudre $\left[(8*x-18)*\exp(-x)>0,x\right]$ $\rightarrow x > 9/4$

   En utilisant ces résultats :

   a) Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.

   b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0;5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x - 2)\mathrm{e}^{-x}$$

   a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?
   b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

EXERCICE 3

(*D'après sujet bac Pondichéry 2016*)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

— Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$C(x) = 0{,}3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

— Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$R(x) = 3x$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

— On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

PARTIE A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.

Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
   b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

PARTIE B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$g(x) = -0{,}6x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1;15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$.
   b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1;15]$.
2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.
   b) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;15]$.
   Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
   c) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1;15]$.

PARTIE C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a :

$$D(x) = -0{,}3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1;15]$ et on note D' sa fonction dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1;15]$.
4. a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.
   b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.