

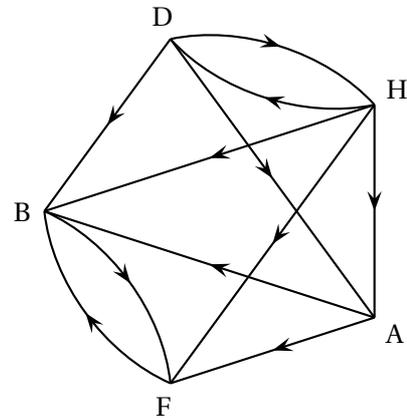
I GRAPHE ORIENTÉ

On appelle *graphe orienté*, un graphe dont les arêtes sont affectées de flèches définissant un sens.

En modélisant un plan de circulation en ville, reliant des points précis par des rues qui peuvent être en sens unique, on obtient un graphe orienté :

On donne par exemple ce graphe orienté.

- Il est d'ordre 5 car il possède 5 sommets.
- Il est bien connexe car on peut relier chaque couple de sommets du graphe.
- Il n'est pas complet car les sommets *F* et *D* ne sont pas adjacents.
- On peut déterminer sa matrice d'adjacence où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique. :



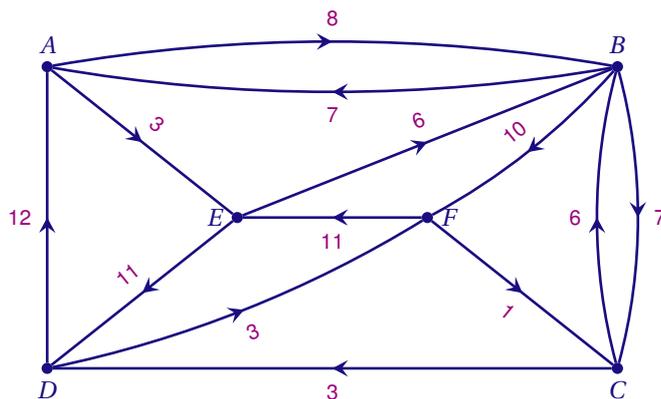
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II GRAPHE PONDÉRÉ

1 DÉFINITION

On appelle *graphe pondéré*, un graphe (orienté ou non) dont les arêtes ont été affectées d'un nombre appelé poids (ou coût).

EXEMPLE



2 LONGUEUR D'UN CHEMIN

La longueur d'un chemin dans un graphe pondéré est égale à la somme des poids de chacun arcs (ou de chacune des arêtes) qui le constituent.

REMARQUE

Cette définition généralise la définition de la longueur d'une chaîne dans un graphe non pondéré, il suffit d'attribuer un poids égal à 1 à chaque arête du graphe.

Dans l'exemple précédent, la longueur du chemin $AEBF$ est 19.

Si on souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F, on peut essayer d'énumérer tous les chemins ABF , $AEBF$, $AEDF$, $ABCDF$, $AEBCDF$ et calculer leurs longueurs. Mais avec un graphe de taille plus importante, ceci risque de devenir rapidement impossible.

Pour résoudre ce problème, on fait appel à des algorithmes.

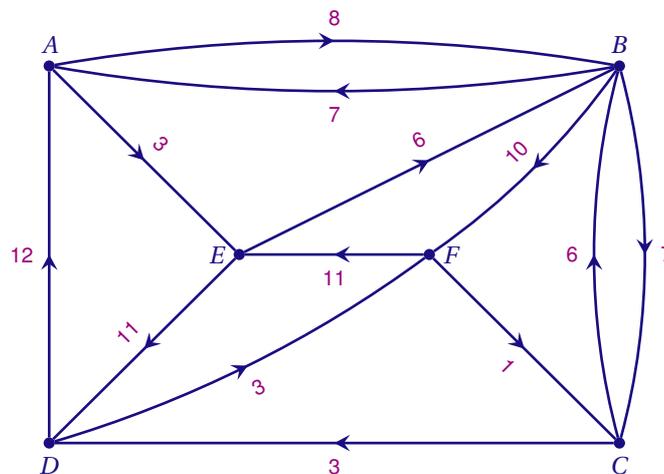
On n'étudie que le cas particulier où **les poids de tous les arcs sont des réels positifs**.

III ALGORITHME DE DIJKSTRA

E. W. Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres dans un graphe pondéré dont tous les poids sont positifs.

EXEMPLE

Considérons le graphe suivant dont on souhaite déterminer le plus court chemin du sommet A au sommet F.



A	B	C	D	E	F	Sommets sélectionnés
0	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
	8(A)	∞	∞	3(A)	∞	E(3)
	8(A)	∞	14(E)		∞	B(8)
		15(B)	14(E)		18(B)	D(14)
		15(B)			17(D)	C(15)
					17(D)	F(17)

- L'algorithme de Dijkstra fournit les longueurs des plus courts chemins du sommet origine aux différents sommets.
- Pour déterminer le plus court chemin du sommet origine à un sommet x , il suffit de remonter la liste des prédécesseurs en partant de x .

Ainsi, le plus court chemin de A à F est un chemin de longueur 17.

Dans la colonne F on lit que le prédécesseur de F est le sommet D. Le prédécesseur de D est E et, le prédécesseur de E est A.

Ainsi, la liste des prédécesseurs est $F \leftarrow D \leftarrow E \leftarrow A$.

Le plus court chemin de A à F est donc : A-E-D-F.