

I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q (VIDÉO 1)

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \mapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit q un nombre strictement positif.

La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q .

La fonction de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif
 La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction
 On admet que cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} .

EXEMPLE

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0,8^x$ est la fonction exponentielle de base 0,8.

Une valeur approchée de l'image de $-5,3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence :

.....

RELATION FONCTIONNELLE

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme

Pour tous réels x et y :

$$f(x + y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y :

EXEMPLE :

$2,3^{3+4} = \dots\dots\dots$

Ce qui est découlé des propriétés des puissances abordées en collège.

CONSÉQUENCES

— Pour tous réels x et y , et

En effet,

De plus,

— Pour tout réel x ,

En effet,

— Pour tout réel x et tout entier relatif m ,

Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

— Pour tout entier naturel $n > 0$, $q^{\frac{1}{n}}$ est « la racine n -ième » de q

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\frac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

EXEMPLE(vidéo 2)

Énoncé : Une entreprise s'est fixé comme objectif de réduire de 30 % ses émissions de gaz à effet de serre d'ici quinze ans. De combien doit-elle réduire en moyenne ses émissions de gaz chaque année pour

atteindre son objectif?

Correction : Soit $t\%$ le pourcentage d'évolution annuel moyen des émissions de gaz à effet de serre. On a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{15} = 0,7 &\iff 1 + \frac{t}{100} = 0,7^{\frac{1}{15}} \\ &\iff \frac{t}{100} = 0,7^{\frac{1}{15}} - 1 \\ \text{Soit } \frac{t}{100} &\approx -0,0235 \end{aligned}$$

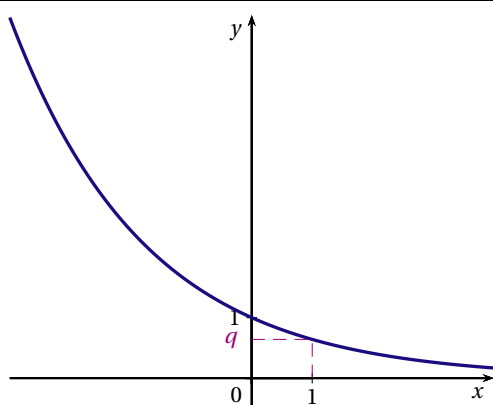
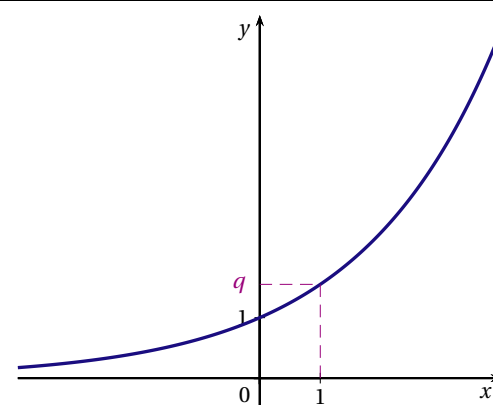
Pour atteindre son objectif, cette entreprise doit réduire chaque année, ses émissions de gaz à effet de serre d'environ 2,35 % .

2 SENS DE VARIATION : VIDÉO 3

En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q > 0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

- Si $0 < q < 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est
- Si $q = 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est
- Si $q > 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est

3 PROPRIÉTÉS

$0 < q < 1$	$q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement	La fonction exponentielle de base q est strictement
$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = \dots$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = \dots$
	
La fonction fonction exponentielle de base q est sur \mathbb{R}	

CONSÉQUENCE

Si $q > 0$ et $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a = q^b$ si, et seulement si,

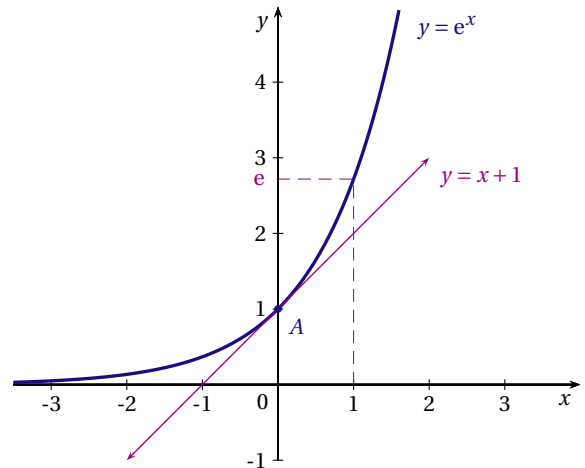
II LA FONCTION EXPONENTIELLE : VIDÉO 4

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à ..

Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0;1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1.

Cette valeur particulière du réel q est notée e .

Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est :
.....



1 DÉFINITION

La fonction $x \mapsto e^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle. On la note \exp

$$\exp: x \mapsto e^x$$

CONSÉQUENCES

- La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par
- $\exp(0) = e^0 = .$, $\exp(1) = \dots$, $\exp(-1) = e^{-1} = .$, $\exp(0,5) = e^{0,5} = \dots$
- La fonction exponentielle est strictement sur \mathbb{R} : pour tout nombre réel x ,
- La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et son nombre dérivé en 0 est 1 :
- Pour tous réels x et y , et pour tout entier relatif m

$$e^{x+y} = \dots, \quad e^{-x} = \dots, \quad e^{x-y} = \dots, \quad (e^x)^m = \dots$$

2 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE : VIDÉO 5

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x , $\exp'(x) = \dots$

*** DÉMONSTRATION**

Pour tout réel x et pour tout réel

$h \neq 0$,

Or $\exp'(0) = 1$ signifie que soit

Donc pour tout réel x ,

3 VARIATION : VIDÉO 6

La fonction exponentielle est strictement sur \mathbb{R}

*** DÉMONSTRATION**

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa dérivée.
 Or pour tout réel x , On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

CONSÉQUENCES

- Pour tout réel $x \leq 0$,
- Pour tout réel $x \geq 0$,
- Pour tous réels x et y , $e^x = e^y \iff \dots$ et $e^x < e^y \iff \dots$

EXEMPLES

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

$e^{1-3x} < e^{2x-3} \iff \dots\dots\dots$

D'où l'ensemble solution $S = \dots\dots\dots$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{x^2-1} \geq 1$

$e^{x^2-1} \geq 1 \iff \dots\dots\dots$

D'où l'ensemble solution $S = \dots\dots\dots$

4 COURBE REPRÉSENTATIVE : VIDÉO 7

CONVEXITÉ

La fonction exponentielle est sur \mathbb{R}

* DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et est égale à sa dérivée.

Par conséquent, la dérivée seconde est

LIMITES

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = .$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots$

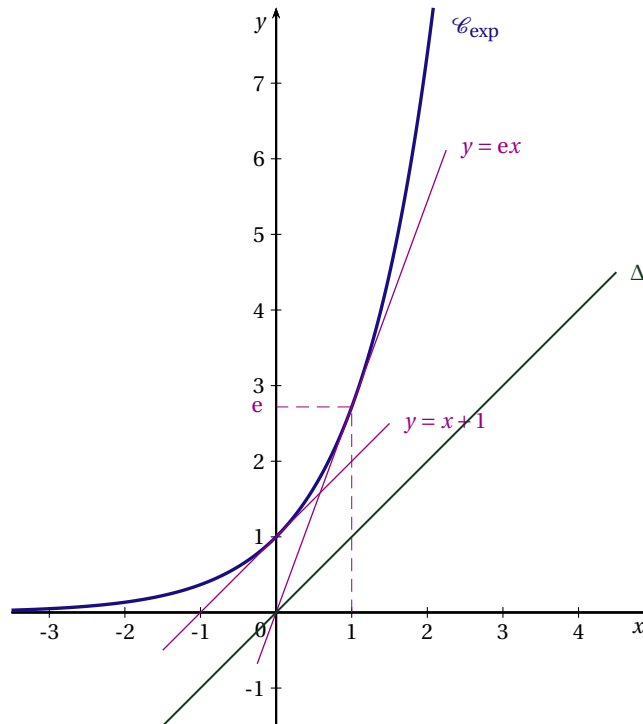
$e > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = \dots$ Par prolongement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \dots$

$e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ d'où $\lim_{n \rightarrow -\infty} e^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n \dots$

Par prolongement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = .$

PROPRIÉTÉS

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 :
2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x - 1) + \exp(1)$ Soit
3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située de la droite Δ d'équation



III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : exp(u) : VIDÉO 9

On considère une fonction u définie sur un intervalle I et la fonction f notée $f = e^u$. EXEMPLES La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x-3}$. On a $u(x) = 0,5x - 3$ avec $f = e^u$.

1 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction e^u est dérivable sur I et

$(e^u)' = \dots\dots$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}$.
 Pour tout réel x , on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = \dots$. Donc f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \dots\dots$
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x^2-2x+1}$.
 Pour tout réel x , posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur \mathbb{R} et $u'(x) = \dots\dots$
 Donc f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \dots\dots\dots$