I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q (VIDÉO 1)

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \longmapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit q un nombre strictement positif.
La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q.
La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base q.
On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE
La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0{,}8^x$ est la fonction exponentielle de base 0,8.
Une valeur approchée de l'image de $-5{,}3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence :
0.8 ∧ (- 5.3).

RELATION FONCTIONNELLE : VIDÉO 2

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme les sommes en produits.
Pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

EXEMPLE :

$2{,}3^{3+4} = 2{,}3^3 \times 2{,}3^4$
Ce qui est découle des propriétés des puissances abordées en collège.

CONSÉQUENCES

— $\boxed{\text{Pour tous réels } x \text{ et } y,\ q^{-x} = \dfrac{1}{q^x} \text{ et } q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}.}$

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ soit $1 = q^x \times q^{-x}$ donc $q^x \neq 0$ et $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.

De plus, $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ q^x > 0.}$

En effet, $q^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}}$ soit $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ avec $q^x \neq 0$.

— $\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ et tout entier relatif } m,\ \left(q^x\right)^m = q^{mx}}$

Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

— $\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n > 0,\ q^{\frac{1}{n}} \text{ est « la racine } n\text{-ième » de } q}$

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\dfrac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

EXEMPLE (**vidéo 3**)

Énoncé : Une entreprise s'est fixé comme objectif de réduire de 30 % ses émissions de gaz à effet de serre d'ici quinze ans. De combien doit-elle réduire en moyenne ses émissions de gaz chaque année pour atteindre son objectif?

Correction : Soit t % le pourcentage d'évolution annuel moyen des émissions de gaz à effet de serre. On a :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{t}{100}\right)^{15}=0{,}7 \quad &\iff \quad 1+\frac{t}{100}=0{,}7^{\frac{1}{15}}\\ &\iff \quad \frac{t}{100}=0{,}7^{\frac{1}{15}}-1\\ \text{Soit} \quad & \quad \frac{t}{100}\approx -0{,}0235\end{aligned}$$

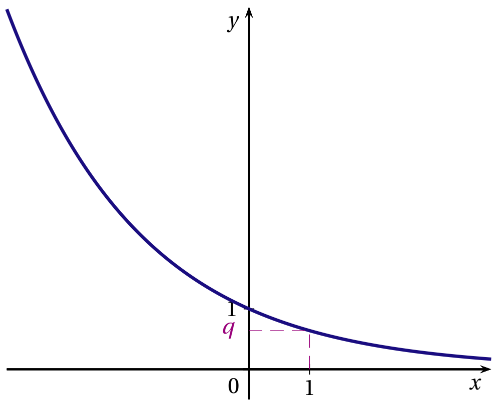
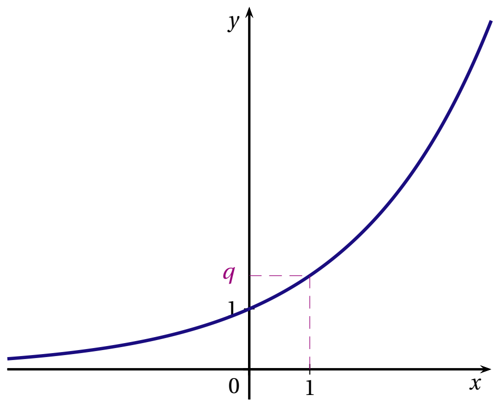
Pour atteindre son objectif, cette entreprise doit réduire chaque année, ses émissions de gaz à effet de serre d'environ 2,35 % .

2 SENS DE VARIATION : VIDÉO 4

En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q>0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

- Si $0<q<1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q=1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q>1$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 PROPRIÉTÉS

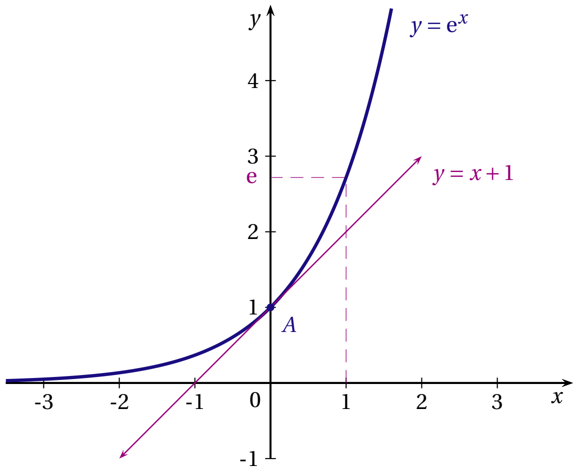
<table>
<tr><td>$0<q<1$</td><td>$q>1$</td></tr>
<tr><td>La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.</td><td>La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=0$</td><td>$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=+\infty$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">La fonction fonction exponentielle de base q est convexe sur $\mathbb{R}$</td></tr>
</table>

CONSÉQUENCE

Si $q>0$ et $q\neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a=q^b$ si, et seulement si, $a=b$.

II LA FONCTION EXPONENTIELLE : VIDÉO 5

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à 1.
Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0;1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1.
Cette valeur particulière du réel q est notée e.
Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$.



1 DÉFINITION

La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle.
On la note exp

$$\exp : x \longmapsto \mathrm{e}^x$$

CONSÉQUENCES

— La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par $\exp(x) = \mathrm{e}^x$

— $\exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$, $\exp(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$, $\exp(-1) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $\exp(0{,}5) = \mathrm{e}^{0{,}5} = \sqrt{\mathrm{e}}$

— La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x, $\mathrm{e}^x > 0$

— La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$

— Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif m

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y, \qquad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}, \qquad \mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}, \qquad (\mathrm{e}^x)^m = \mathrm{e}^{mx}$$

2 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE : VIDÉO 6

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \mathrm{e}^x$

✻ DÉMONSTRATION

Pour tout réel x et pour tout réel $h \neq 0$, $\frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \frac{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^h - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \times \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}$

Or $\exp'(0) = 1$ signifie que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{0+h}-\mathrm{e}^0}{h} = 1$ soit $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$.

Donc pour tout réel x, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \times \frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \mathrm{e}^x$

3 VARIATION : VIDÉO 7

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

✳ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.
Or pour tout réel x, $e^x > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

- Pour tout réel $x \leqslant 0$, $0 < e^x \leqslant 1$
- Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$
- Pour tous réels x et y, $e^x = e^y \iff x = y$ et $e^x < e^y \iff x < y$

EXEMPLES

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

   $e^{1-3x} < e^{2x-3} \iff 1-3x < 2x-3 \iff -5x < -4 \iff x > \frac{4}{5}$
   D'où l'ensemble solution $S = \left]\frac{4}{5};+\infty\right[$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-1} \geqslant 1$

   $e^{x^2-1} \geqslant 1 \iff e^{x^2-1} \geqslant e^0 \iff x^2-1 \geqslant 0$
   D'où l'ensemble solution $S =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

4 COURBE REPRÉSENTATIVE : VIDÉO 8

CONVEXITÉ

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

✳ DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.

Par conséquent, la dérivée seconde est $\exp''(x) = e^x$ donc $\exp''(x) > 0$.

LIMITES

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

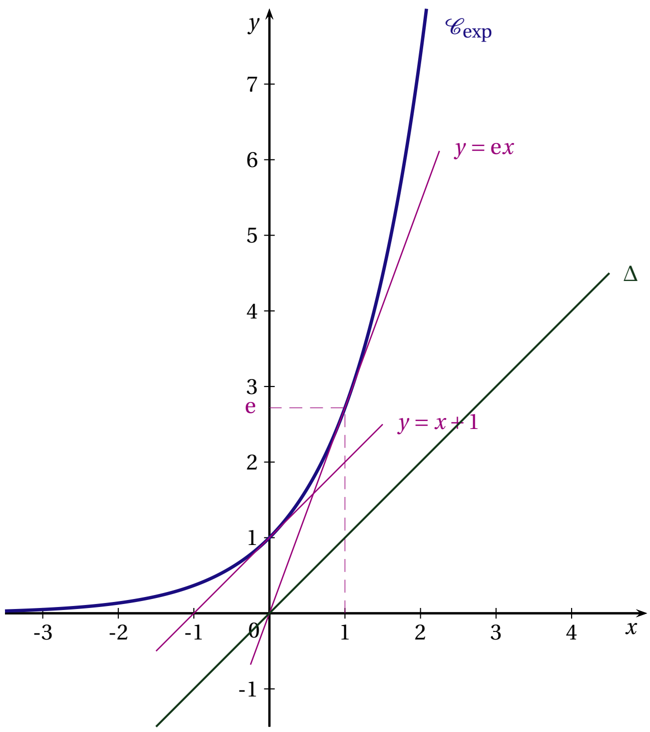
$e > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$. Par prolongement, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$ d'où $\lim_{n\to-\infty} e^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$.

Par prolongement, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

PROPRIÉTÉS

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x+1$
2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1)\times(x-1)+\exp(1)$ Soit $y = ex$
3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.



III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$: VIDÉO 9

On considère une fonction u définie sur un intervalle I et la fonction f notée $f = \mathrm{e}^u$. EXEMPLES La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x-3}$. On a $u(x) = 0,5x - 3$ avec $f = \mathrm{e}^u$.

1 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \times u'$$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -1$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{0,5x^2-2x+1}$.
   Pour tout réel x, posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = x - 2$.
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x-2)\mathrm{e}^{0,5x^2-2x+1}$.