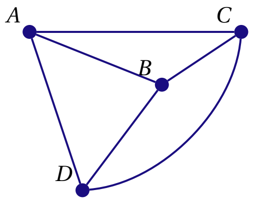
I GRAPHES PREMIÈRES DÉFINITIONS

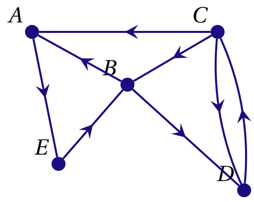
1 INTRODUCTION

EXEMPLES :

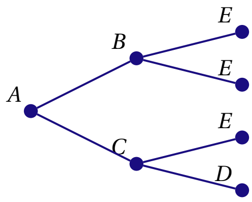
Les schémas suivants s'appellent des ....



Graphe G_1



Graphe G_2



Graphe G_3

APPLICATIONS :

Les graphes sont très utiles pour modéliser des connexions entre des éléments (plan de transports en communs, réseau ferré entre villes,représenter un réseau d'ordinateurs, tournois sportifs, ...).

OBSERVATIONS DE BASE :

Un graphe est constitué de .... (les points A, B, ...) et d' .... qui relient ces ....

Un graphe peut être construit avec des .... (*Graphe* G_3), on parle alors de ...., ou simplement des segments (*Graphe* G_1).

Certains graphes possèdent plusieurs arcs entre deux sommets (*Graphe* G_2 *entre* C *et* D).

L'objet de ce cours est de définir rigoureusement ces objets et d'en déterminer des propriétés.
Les graphes sont très pratique pour résoudre des problèmes très concrets.

2 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS :

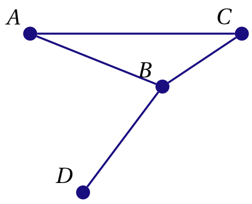
— On appelle ***graphe*** .... un ensemble de points, appelés ...., reliés par des lignes, appelées ....

— L' ..... du graphe est le ....

— Le ...... d'un sommet est le nombre d' ...... partant de ce sommet.

— Deux sommets reliés par une ..... sont ....

ILLUSTRATION :



Graphe G_1

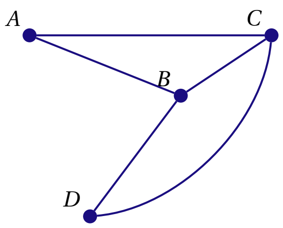
— Le graphe G_1 ci-dessus est ....

— Les sommet A et C sont de ……. , le sommet D est de ……. , Le sommet B est de ……..

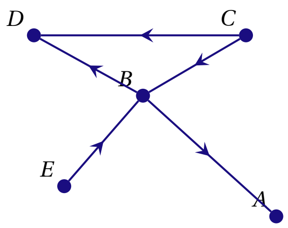
— Un graphe est dit ……. si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.

— Un graphe peut être ……. , une arête est alors appelée un …. Un arc est défini par un couple ……………. de sommets.

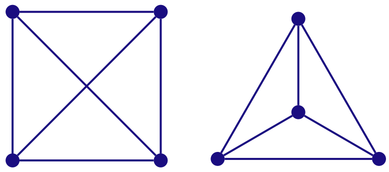
— Un graphe …….. K_n est un graphe simple d'ordre $n \geqslant 1$ dont tous les sommets sont ……………………..



Graphe …….



Graphe ……..



Graphes ………………….

THÉORÈME

La ………………. de tous les sommets d'un graphe est égale à ………………………… de ce graphe ; c'est donc un …………

✼ DÉMONSTRATION

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

II CHAÎNES, CYCLES ; CONNEXITÉ

Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

1 DÉFINITIONS

Soit G un graphe non orienté.

— Une ……. est une liste finie et ordonnée de sommets ………..

— La ……… de la chaîne est le nombre d'arêtes parcourue par cette chaîne.

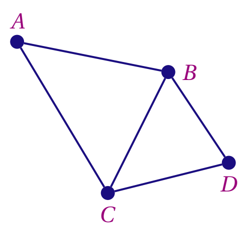
— Une …………… est une chaîne dont toutes les arêtes sont ………

— Une chaîne est un ….. si elle est composées d'arêtes ……………. et que l'origine et l'extrémité ………………

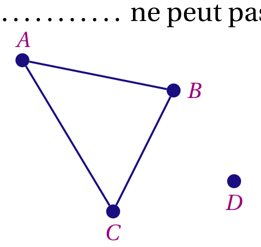
— Un graphe est dit …….. s'il existe au moins une chaîne ……………………………… de ce graphe.

EXEMPLES :

On donne le graphe G ci-dessous :



— $A-B-D-C-B$ est une ....
— $A-D-C-B$ n'est pas un .... A et D ne sont pas consécutifs.
— $A-B-D-C$ est une chaîne .... de **longueur** ..
— $A-B-D-C-A$ est un ..... de **longueur** ..
— Ce graphe est ...., on peut relier tous les sommets entre-eux par une chaîne.
— Le graphe ci-dessous ...., le .... ne peut pas être relié aux autres par une chaîne.

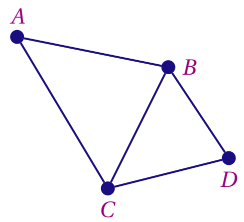


2 CYCLE EULÉRIEN

DÉFINITION

— Une chaîne est dite .... lorsqu'elle contient toutes les arêtes du graphe, chacune prises ....
— Un .... est une chaîne eulérienne dont l'origine et l'extrémité ....

EXEMPLE :



Dans cette situation, la chaîne : $A-B-D-C$ ....
Et $A-B-D-C-A$ est un ....

THÉORÈME D'EULER

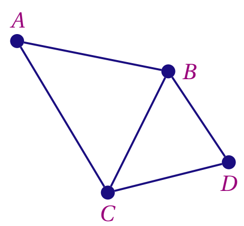
— Un graphe connexe possède une ***chaîne eulérienne*** si, et seulement si, le nombre de sommets de ***degré impair*** ....
— Un graphe connexe admet un ***cycle eulérien*** si, et seulement si, tous ses sommets ....

REMARQUE :

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2, alors les deux sommets de degré impair sont ....

EXEMPLE 1 :

On donne le graphe G ci-dessous :



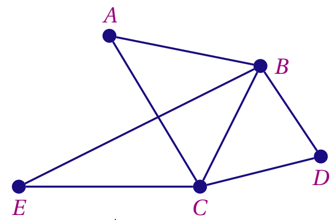
On calcule les degrés de chacun de ses sommets :

Sommet	A	B	C	D
Degré	.	.	.	.

On observe que deux sommets ont .... Le graphe G admet donc ....
Une chaîne eulérienne peut être ....
Ce graphe n'admet donc pas de ....

Exemple 2 :

On donne le graphe G ci-dessous :



On calcule les degrés de chacun de ses sommets :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	.	.	.	.	.

On observe que tous les sommets sont .... Le graphe G admet donc un ....
Un .... peut être : ....

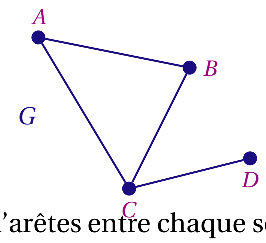
III Matrice d'adjacence d'un graphe

1 Représentation matricielle d'un graphe

Soit G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La ***matrice d'adjacence*** de G est égale à la matrice carrée $M = \left(m_{ij}\right)$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets i et j.

Exemple

1. On donne ce graphe G :



2. On construit un tableau avec le nombre d'arêtes entre chaque sommet :

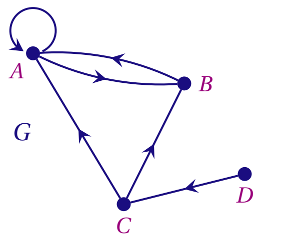
	A	B	C	D
A	.	.	.	.
B	.	.	.	.
C	.	.	.	.
D	.	.	.	.

3. On en déduit la matrice d'adjacence $M = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$

Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au .... le sommet i et ....

EXEMPLE

1. On donne ce graphe G :



2. On construit un tableau avec le nombre d'arêtes ayant pour origine un sommet qui rejoint un autre :

	A	B	C	D
A	.	.	.	.
B	.	.	.	.
C	.	.	.	.
D	.	.	.	.

3. La matrice d'adjacence du graphe orienté G est $M = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$

REMARQUES :

1. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est ....
2. La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple ne ....

2 PROPRIÉTÉ

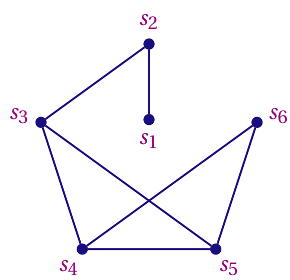
Soit G un graphe et M sa matrice d'adjacence, et n un entier positif.
Le coefficient situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M^n est égal ....

DISTANCE

Soit G un graphe ; si x et y sont deux sommets de G, la distance de x à y est la longueur d'une plus courte chaîne de G reliant x à y.

EXEMPLE :

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G ci-contre



A la calculatrice, on obtient la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

On applique donc la propriété pour ......
Il y a .... qui relient s_3 à s_2 :

....

....

....

....