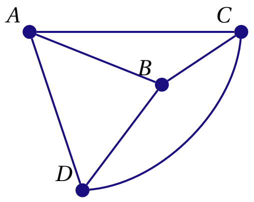
I GRAPHES PREMIÈRES DÉFINITIONS

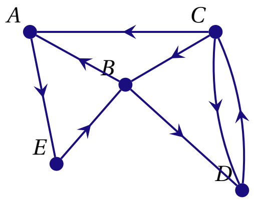
1 INTRODUCTION

EXEMPLES :

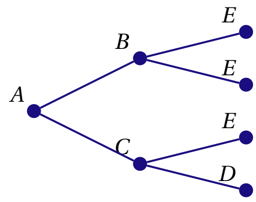
Les schémas suivants s'appellent des graphes.



Graphe G_1



Graphe G_2



Graphe G_3

APPLICATIONS :

Les graphes sont très utiles pour modéliser des connexions entre des éléments (plan de transports en communs, réseau ferré entre villes,représenter un réseau d'ordinateurs, tournois sportifs, ...).

OBSERVATIONS DE BASE :

Un graphe est constitué de **sommets** (les points A, B, ...) et d'**arêtes** (ou arcs))qui relient ces sommets.

Un graphe peut être construit avec des flèches (*Graphe* G_3), on parle alors de ***graphe orienté***, ou simplement des segments (*Graphe* G_1).

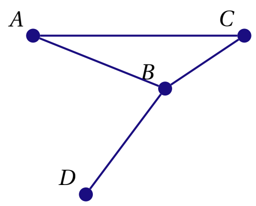
Certains graphes possèdent plusieurs arcs entre deux sommets (*Graphe* G_2 *entre* C *et* D).

> L'objet de ce cours est de définir rigoureusement ces objets et d'en déterminer des propriétés.
> Les graphes sont très pratique pour résoudre des problèmes très concrets.

2 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS :

- On appelle ***graphe*** non orienté un ensemble de points, appelés ***sommets***, reliés par des lignes, appelées ***arêtes***.
- L'***ordre*** du graphe est le nombre de sommets.
- Le ***degré*** d'un sommet est le nombre d'***arêtes*** partant de ce sommet.
- Deux sommets reliés par une arête sont **adjacents**.

ILLUSTRATION :

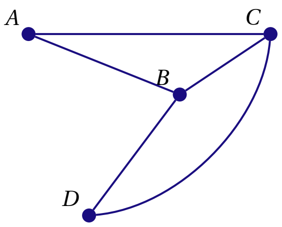


Graphe G_1

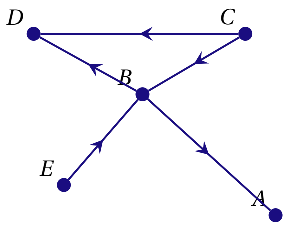
— Le graphe G_1 ci-dessus est d'ordre 4

— Les sommet A et C sont de degré 2, le sommet D est de degré 1, Le sommet B est de degré 3.

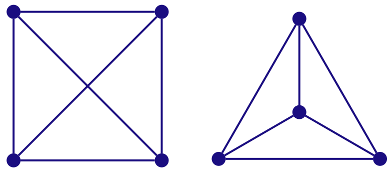
- Un graphe est dit ***simple*** si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est sans boucle.
- Un graphe peut être ***orienté***, une arête est alors appelée un ***arc***. Un arc est défini par un couple ordonné (A,B)) de sommets.
- Un graphe ***complet*** K_n est un graphe simple d'ordre $n \geqslant 1$ dont tous les sommets sont deux à deux adjacents.



Graphe **simple**



Graphe **orienté**


Graphes **complets** d'ordre 4

THÉORÈME

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair.

✻ DÉMONSTRATION

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité.

II CHAÎNES, CYCLES ; CONNEXITÉ

Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

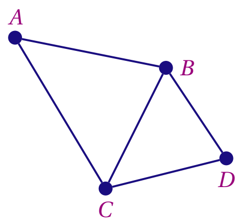
1 DÉFINITIONS

Soit G un graphe non orienté.

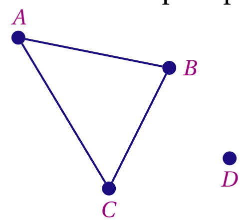
- Une ***chaîne*** est une liste finie et ordonnée de sommets consécutifs.
- La ***longueur*** de la chaîne est le nombre d'arêtes parcourue par cette chaîne.
- Une ***chaîne simple*** est une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes.
- Une chaîne est un ***cycle*** si elle est composées d'arêtes toutes distinctes et que l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Un graphe est dit ***connexe*** s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

EXEMPLES :

On donne le graphe G ci-dessous :



— $A-B-D-C-B$ est une **chaîne** de **longueur** 4.
— $A-D-C-B$ n'est pas un chaîne A et D ne sont pas consécutifs.
— $A-B-D-C$ est une chaîne **simple** de **longueur** 3.
— $A-B-D-C-A$ est un **cycle** de **longueur** 4.
— Ce graphe est ***connexe***, on peut relier tous les sommets entre-eux par une chaîne.
— Le graphe ci-dessous n'est pas connexe, le sommet D ne peut pas être relié aux autres par une chaîne.

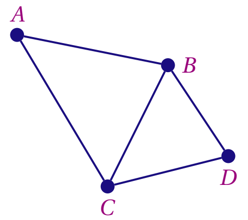


2 CYCLE EULÉRIEN

DÉFINITION

— Une chaîne est dite ***eulérienne*** lorsqu'elle contient toutes les arêtes du graphe, chacune prises une et une seule fois.
— Un ***cycle eulérien*** est une chaîne eulérienne dont l'origine et l'extrémité sont confondus.

EXEMPLE :



Dans cette situation, la chaîne : $A-B-D-C$ est eulérienne.
Et $A-B-D-C-A$ est un cycle eulérien.

THÉORÈME D'EULER

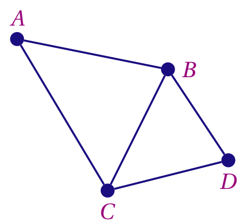
— Un graphe connexe possède une ***chaîne eulérienne*** si, et seulement si, le nombre de sommets de ***degré impair est égal à 0 ou 2***.
— Un graphe connexe admet un ***cycle eulérien*** si, et seulement si, tous ses sommets ***ont un degré pair***.

REMARQUE :

Si le nombre de sommets de degré impair est égal à 2, alors les deux sommets de degré impair sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

EXEMPLE 1 :

On donne le graphe G ci-dessous :



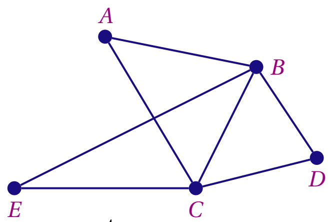
On calcule les degrés de chacun de ses sommets :

Sommet	A	B	C	D
Degré	2	3	3	2

On observe que deux sommets ont des degrés impairs. Le graphe G admet donc une chaîne eulérienne.
Une chaîne eulérienne peut être :$C-A-B-C-D-B$
Ce graphe n'admet donc pas de cycle eulérien.

EXEMPLE 2 :

On donne le graphe G ci-dessous :



On calcule les degrés de chacun de ses sommets :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	2	4	4	2	2

On observe que tous les sommets sont de degrés pairs. Le graphe G admet donc un cycle eulérien.
Un cycle eulérien peut être :$A-B-C-D-B-E-C-A$

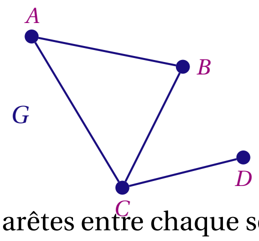
III MATRICE D'AJACENCE D'UN GRAPHE

1 REPRÉSENTATION MATRICIELLE D'UN GRAPHE

Soit G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n.
La ***matrice d'adjacence*** de G est égale à la matrice carrée $M=\left(m_{ij}\right)$ de dimension $n\times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets i et j.

EXEMPLE

1. On donne ce graphe G :



2. On construit un tableau avec le nombre d'arêtes entre chaque sommet :

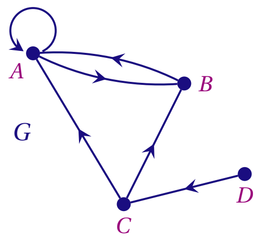
	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	1	0	1	0
C	1	1	0	1
D	0	0	1	0

3. On en déduit la matrice d'adjacence $M=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

Dans le cas d'un graphe orienté, m_{ij} est égal au ***nombre d'arcs ayant pour origine*** le sommet i et ***pour extrémité finale*** le sommet j.

EXEMPLE

1. On donne ce graphe G :



2. On construit un tableau avec le nombre d'arêtes ayant pour origine un sommet qui rejoint un autre :

	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	0	0	0
C	1	1	0	0
D	0	0	1	0

3. La matrice d'adjacence du graphe orienté G est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

REMARQUES :

1. La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.
2. La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple ne comporte que des 0.

2 PROPRIÉTÉ

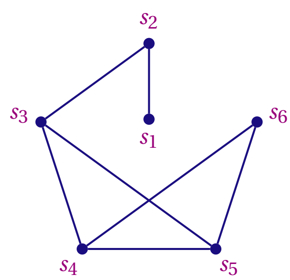
Soit G un graphe et M sa matrice d'adjacence, et n un entier positif.
Le coefficient situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice M^n est égal au ***nombre de chaînes*** de longueur n joignant le sommet i au sommet j .

DISTANCE

Soit G un graphe; si x et y sont deux sommets de G, la distance de x à y est la longueur d'une plus courte chaîne de G reliant x à y.

EXEMPLE :

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice d'adjacence du graphe G ci-contre



A la calculatrice, on obtient la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

On applique donc la propriété pour $n = 3$:
Il y a 4 chaînes de longueur 4 qui relient s_3 à s_2 :

s_3 - s_4 - s_3 - s_2

s_3 - s_5 - s_3 - s_2

s_3 - s_2 - s_1 - s_2

s_3 - s_2 - s_3 - s_2