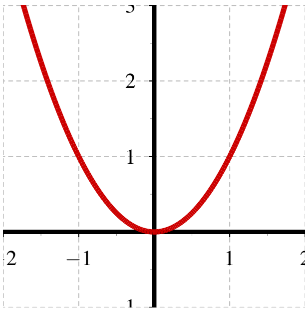
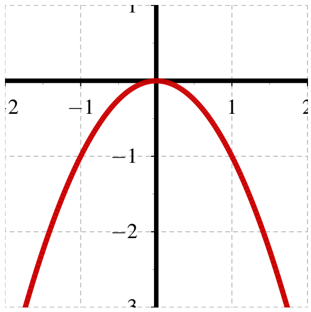
I DÉCOUVERTE DE NA NOTION DE CONVEXITÉ :

1 APPROCHE INTUITIVE

Quand on représente graphiquement une fonction, on peut observer sa **courbure**. Plutôt *tournee vers le haut* ou *plutot tournee vers le bas* **Illustration :**



Courbure *tournée vers le haut*



Courbure *tournée vers le bas*

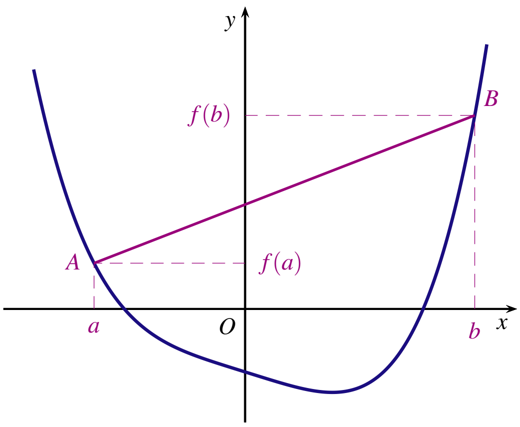
> **Définition intuitive :**
> On dira qu'une fonction dont la courbe est "*tournée vers le haut*" est **convexe** sur l'intervalle considéré, et qu'une fonction dont la courbe est "*tournée vers le bas*" est **concave** sur l'intervalle considéré.

> **Moyen mnémotechnique :**
> Quand la courbe est "*tournée vers le bas*", elle est *tournée vers la cave*. La fonction est donc **concave**.

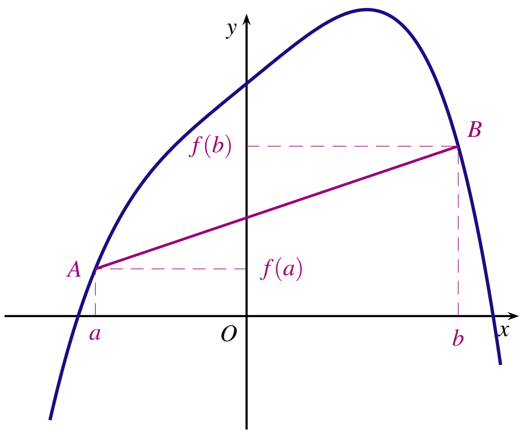
2 APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

On observe que, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$

- Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.
- Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.



f est convexe.



f est concave

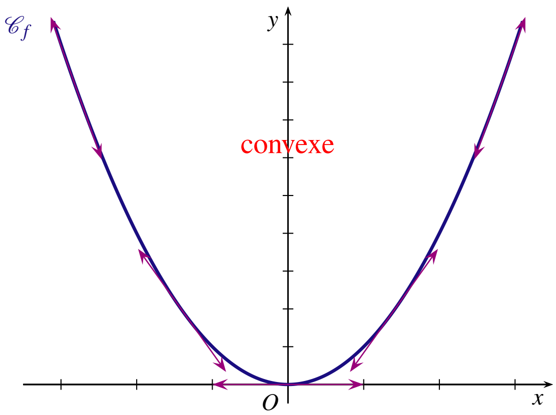
Définition géométrique :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I , $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative sur I, et deux points A et B appartenant à la courbe.

- Dire que la fonction f est **convexe** sur I signifie que tout segment $[AB]$ sera situé "*au dessus*" de $\mathscr{C}_f$.
- Dire que la fonction f est **concave** sur I signifie que tout segment $[AB]$ sera situé "*au dessous*" de $\mathscr{C}_f$.

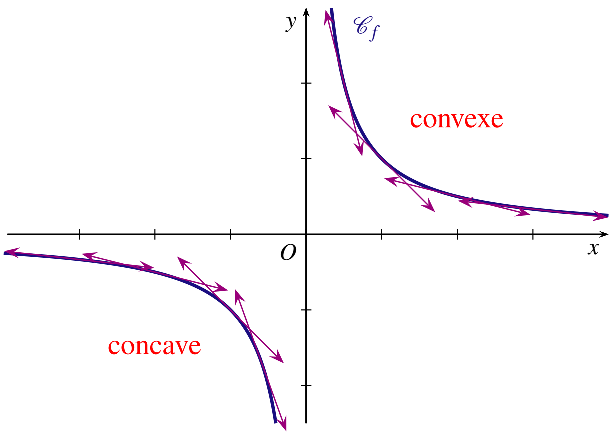
3 APPROCHE GRAPHIQUE

Si on représente sur la représentation graphique d'une fonction dérivable sur un intervalle, les tangentes à la courbe, on observe que :

- Les tangentes "*portent*" la courbe quand la fonction est **convexe**.
- La courbe "*porte*" les tangentes quand la fonction est **concave**.



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

Définition graphique :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

II DÉFINITION

1 THÉORÈME

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

Ce théorème est admis (on ne le démontre pas).
Pour déterminer algébriquement si une fonction dérivable sur un intervalle est concave ou convexe, il suffit

donc de déterminer le sens de variation de sa dérivée.
Comment étudier les variations d'une dérivée ? En étudiant le signe de la dérivée seconde !

2 DÉRIVÉE SECONDE

On appelle dérivée seconde d'une fonction f, notée f'', la dérivée de sa dérivée.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$.

Sa dérivée f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 6x^2 - 8x + 5$.

Sa dérivée seconde f'' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 12x - 8$.

Méthode :
Pour déterminer si une fonction f dérivable sur un intervalle est concave ou convexe :

- Il faut étudier les variations de sa dérivée f'.
- Pour étudier les variations de f', il suffit d'étudier le signe de la dérivée seconde f''.

3 PROPRIÉTÉ

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la dérivée f'.

- Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.
- Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$		$\nearrow$	
convexité de f		CONCAVE		CONVEXE	

f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

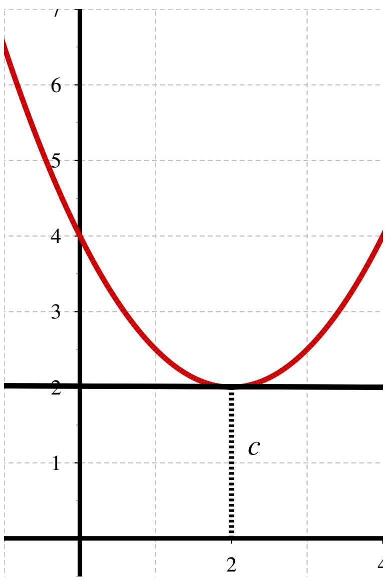
Bilan :

$$\text{Signe de } f'' \Rightarrow \textit{Variations de } f' \Rightarrow \textit{Convexité de } f$$

III PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONVEXES ET CONCAVES

1 CONVEXITÉ ET EXTREMUM

Théorème :
Si f est une fonction convexe et dérivable sur I et si pour un réel c de I on a $f'(c) = 0$ alors f admet un minimum absolu sur I en c.



Comme la fonction f est convexe sur I, $\mathscr{C}_f$ est au dessus des tangentes pour tous les valeurs de I.

Or on a $f'(c) = 0$, c'est à dire que la tangente en c est horizontale, d'équation $y = f(c)$.
On a donc, pour tout réel $x \in I, f(x) \geq f(c)$

Théorème :
Si f est une fonction **concave** et dérivable sur I et si pour un réel c de I on a $f'(c) = 0$ alors f admet un **maximum absolu** sur I en c.

La démonstration est identique à la précédente.

2 FONCTIONS CONVEXES

FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

- La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$

Opérations sur les fonctions de référence

- Si f et g sont deux fonctions dérivables et convexes sur I, alors $f+g$ est une fonction convexe sur I.
- Si f est une fonction dérivable et convexe sur I, et si λ est un réel positif, alors la fonction λf est convexe sur I.
- Si f est une fonction dérivable et convexe sur I, et si λ est un réel **négatif**, alors la fonction λf est concave sur I.

On a les mêmes propriétés avec les fonctions concaves.

Application

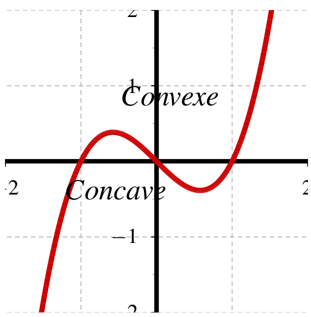
On sait que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2$ est concave sur $\mathbb{R}$.

IV Point d'inflexion

1 Approche graphique



On observe sur cette représentation graphique d'une fonction f que la fonction change de convexité.

Elle semble concave quand x est négatif et convexe quand x est positif.

Il y a donc un point de la courbe qui partage les parties concave et convexe.

2 Conséquences pour les tangentes :

On avait observé dans l'approche graphique (Partie I.3.) que lorsque la fonction f est convexe sur I alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes, et inversement quand f est concave.
Dans la situation du changement de convexité, la tangente passe donc de "*sous*" la courbe à "*sur*" la courbe, ou inversement.
Il existe donc une tangente qui doit traverser la courbe pour passer "d'un côté" de la courbe à "l'autre côté".

3 Conséquences pour la dérivée seconde :

On avait indiqué (Partie II.3.) que lorsque la fonction f'' est positive sur I, la fonction f est convexe sur I et inversement quand f'' est négative, f est concave.
Dans la situation du changement de convexité, la dérivée seconde change donc de signe.
Il existe donc une valeur qui annule f'' avec un changement de signe.

4 DÉFINITION

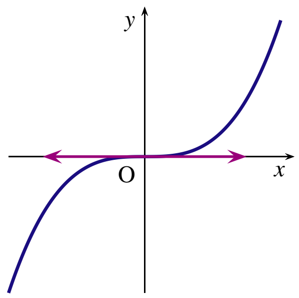
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un **point d'inflexion**.

EXEMPLE

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme **point d'inflexion** l'origine $\mathrm{O}(0;0)$ du repère.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty;0]$.
- Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\mathrm{O}(0;0)$ est un point d'inflexion.



MÉTHODE :

Comment caractériser un point d'inflexion ?

- Si la courbe traverse sa tangente en un point, cela signifie que la fonction change de convexité. Le point considéré est un point d'inflexion.
- Si la dérivée f' change de sens de variation en a, cela signifie que la fonction change de convexité. La courbe admet alors un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la dérivée seconde f'' s'annule **en changeant de signe** en a cela signifie que la fonction change de convexité. La courbe admet alors un point d'inflexion d'abscisse a.

5 EXEMPLE :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 - 40$.
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x-3)$.

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions : $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
variations de f'		$\searrow$		$\searrow$	-175	$\nearrow$	

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\,(3; f(3))$.

En effet :

- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point $B\,(0; 120)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$).
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A\,(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).

Attention :
Pour caractériser un point d'inflexion, il ne suffit pas de déterminer les racines de la dérivée seconde.
Il faut bien vérifier aussi que f'' **change aussi de signe**.

Voir la différence graphique entre le point B et le point A sur la courbe ci-dessous.