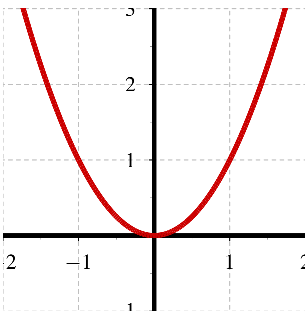
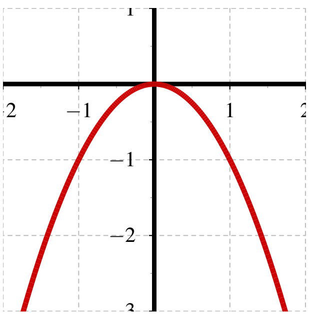
I DÉCOUVERTE DE NA NOTION DE CONVEXITÉ :

1 APPROCHE INTUITIVE

Quand on représente graphiquement une fonction, on peut observer sa **courbure**. Plutôt *tournee vers le haut* ou *plutot tournee vers le bas* **Illustration :**



Courbure . . . .



Courbure . . . .

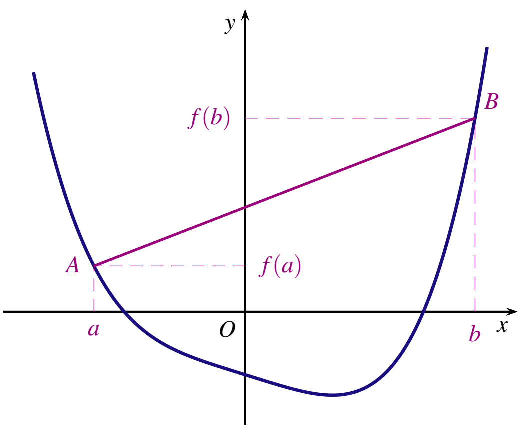
Définition intuitive :
On dira qu'une fonction dont la courbe est "*tournée vers le haut*" est . . . . sur l'intervalle considéré, et qu'une fonction dont la courbe est "*tournée vers le bas*" est . . . . sur l'intervalle considéré.

Moyen mnémotechnique :
Quand la courbe est "*tournée vers le bas*", elle est . . . . La fonction est donc . . . .

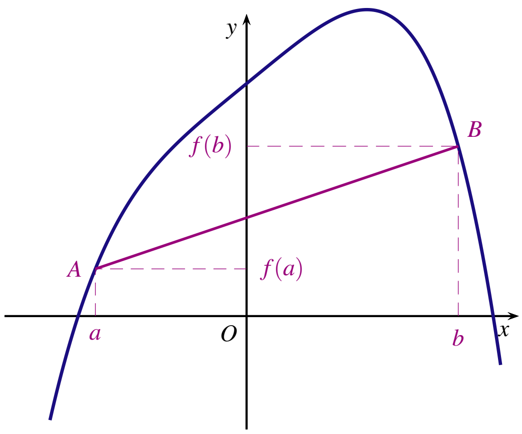
2 APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

On observe que, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$

- Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est . . . .
- Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est . . . .



f est . . . .



f est . . . .

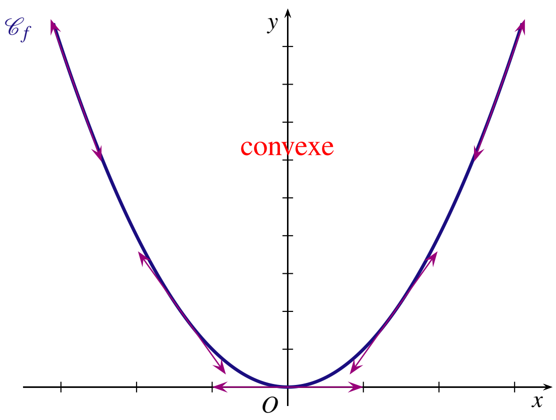
Définition géométrique :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I , $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative sur I, et deux points A et B appartenant à la courbe.

- Dire que la fonction f est .... sur I signifie que tout segment $[AB]$ sera situé .... de $\mathscr{C}_f$.
- Dire que la fonction f est .... sur I signifie que tout segment $[AB]$ sera situé .... de $\mathscr{C}_f$.

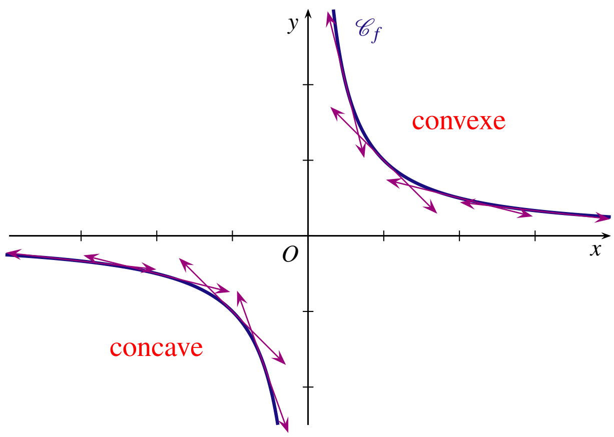
3 APPROCHE GRAPHIQUE

Si on représente sur la représentation graphique d'une fonction dérivable sur un intervalle, les tangentes à la courbe, on observe que :

- Les tangentes "*portent*" la courbe quand la fonction est ....
- La courbe "*porte*" les tangentes quand la fonction est ....



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

Définition graphique :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est .... sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement .... de chacune de ....
- Dire que la fonction f est .... sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement .... de chacune de ....

II DÉFINITION

1 THÉORÈME

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est .... sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est .... sur I.
- f est .... sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est .... sur I.

Ce théorème est admis (on ne le démontre pas).
Pour déterminer algébriquement si une fonction dérivable sur un intervalle est concave ou convexe, il suffit

donc de déterminer le .... de sa dérivée.
Comment étudier les variations d'une dérivée ? En étudiant le signe de la dérivée seconde !

2 Dérivée seconde

On appelle .... d'une fonction f, notée f'', la dérivée de sa dérivée.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$.

Sa dérivée f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) =$...........

Sa dérivée seconde f'' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) =$.......

Méthode :
Pour déterminer si une fonction f dérivable sur un intervalle est concave ou convexe :

- Il faut étudier les .... de sa dérivée f'.
- Pour étudier les variations de f', il suffit d'étudier .... de la dérivée seconde f''.

3 Propriété

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f, c'est à dire la dérivée de la dérivée f'.

- Si la dérivée seconde est .... alors la fonction f est ....
- Si la dérivée seconde est .... alors la fonction f est ....

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) =$ ....

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) =$........................

Les variations de f' se déduisent .... de sa dérivée f''.
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $f''(x)$	.	:	.
variations de f'			
convexité de f	....		....

f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

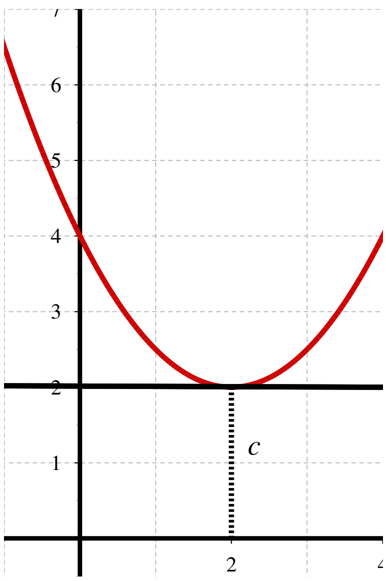
Bilan :

Signe de f'' $\Rightarrow$ .... $\Rightarrow$ ....

III PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONVEXES ET CONCAVES

1 CONVEXITÉ ET EXTREMUM

Théorème :
Si f est une fonction .... et dérivable sur I et si pour un réel c de I on a .... alors f admet un .... sur I en c.



Comme la fonction f est .... sur I, $\mathscr{C}_f$ est au dessus des tangentes pour tous les valeurs de I.

Or on a ...., c'est à dire que la tangente en c est horizontale, d'équation $y = f(c)$.
On a donc, pour tout réel $x \in I, f(x) \geq f(c)$

Théorème :
Si f est une fonction .... et dérivable sur I et si pour un réel c de I on a $f'(c) = 0$ alors f admet un **maximum absolu** sur I en c.

La démonstration est identique à la précédente.

2 FONCTIONS CONVEXES

FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

- La fonction $x \mapsto x^2$ est .... sur $\mathbb{R}$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est .... sur $\mathbb{R}_+^*$

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

- Si f et g sont deux fonctions dérivables et convexes sur I, alors $f+g$ est une fonction .... sur I.
- Si f est une fonction dérivable et convexe sur I, et si λ est un réel positif, alors la fonction λf est .... sur I.
- Si f est une fonction dérivable et convexe sur I, et si λ est un réel **négatif**, alors la fonction λf est .... sur I.

On a les mêmes propriétés avec les fonctions concaves.

APPLICATION

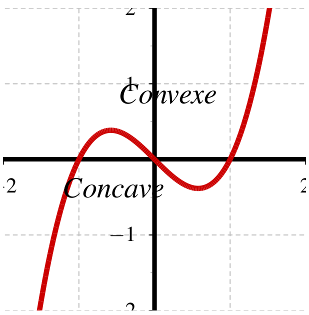
On sait que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

- La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2$ est .... sur $\mathbb{R}$.

- La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x^2$ est .... sur $\mathbb{R}$.

IV POINT D'INFLEXION

1 APPROCHE GRAPHIQUE



On observe sur cette représentation graphique d'une fonction f que la fonction change de convexité.

Elle semble concave quand x est négatif et convexe quand x est positif.

Il y a donc un point de la courbe qui partage les parties concave et convexe.

2 CONSÉQUENCES POUR LES TANGENTES :

On avait observé dans l'approche graphique (Partie I.3.) que lorsque la fonction f est convexe sur I alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement ...., et inversement quand f est concave.
Dans la situation du changement de convexité, la tangente passe donc de ..... la courbe à .... la courbe, ou inversement.
Il existe donc une tangente qui doit .... la courbe pour passer "d'un côté" de la courbe à "l'autre côté".

3 CONSÉQUENCES POUR LA DÉRIVÉE SECONDE :

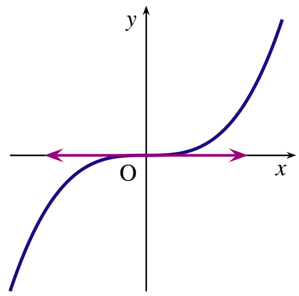
On avait indiqué (Partie II.3.) que lorsque la fonction f'' est positive sur I, la fonction f est convexe sur I et inversement quand f'' est négative, f est concave.
Dans la situation du changement de convexité, la dérivée seconde change donc de signe.
Il existe donc une valeur qui .... avec un ....

4 DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que .... sa tangente en ce point, alors on dit que A est un ....

EXEMPLE

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme .... l'origine $\text{O}(0;0)$ du repère.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.



- Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est .... de la tangente en O sur $]-\infty;0]$.
- Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est .... de la tangente en O sur $[0;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $\text{O}(0;0)$ est un ....

MÉTHODE :

Comment caractériser un point d'inflexion ?

- Si la courbe .... sa tangente en un point, cela signifie que la fonction change de convexité. Le point considéré est un point d'inflexion.
- Si la dérivée f' .... en a, cela signifie que la fonction change de convexité. La courbe admet alors un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la dérivée seconde f'' .... en a cela signifie que la fonction change de convexité. La courbe admet alors un point d'inflexion d'abscisse a.

5 EXEMPLE :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4 - 40x + 120$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) =$ ....
Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) =$...........

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions : ....
Notons que $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que .....

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		.	0	.	0	.	
variations de f'					-175		

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un ....

En effet :

- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty;3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point $B(0;120)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 0, ... (La fonction f est concave sur $]-\infty;3]$).
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc .... de la courbe $\mathscr{C}_f$. (La fonction f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$).

Attention :
Pour caractériser un point d'inflexion, il ne suffit pas de déterminer les racines de la dérivée seconde.
Il faut bien vérifier aussi que ....

Voir la différence graphique entre le point B et le point A sur la courbe ci-dessous.