Les suites arithmético-géométriques

1. Généralités avec les suites (rappels) :(vidéo 1)

1.1 Suite définie de manière explicite :

Une suite (u_n) est définie de **manière ……………...** si son terme général s'écrit en fonction de n .

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $u_n = 2n+3$

1.2. Suite définie par une relation de récurrence :

Une suite (u_n) est définie par **……………**

- si on connaît **son ……………**
- si son terme général s'écrit en fonction de**…………………………**

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

On a alors par exemple : $u_1 = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

2. Suites arithmétiques (rappels):(vidéo 2)

2.1. Définition :

Une suite arithmétique (u_n) est définie par la donnée

- **…………………………** ,
- d'une raison **……………**
- de la formule de récurrence : **……………**

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

2.2. Expression de u_n en fonction de n

(u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r si et seulement si , pour tout entier n , on a **……………**

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

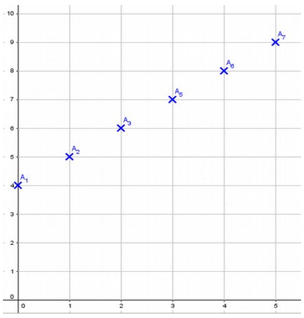
La suite (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 3$

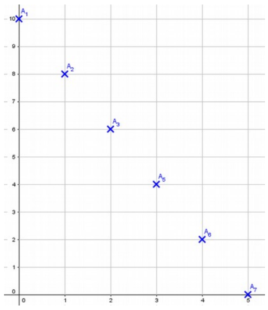
on a donc **…………………………**

2.3. Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .

- Si …………… alors la suite (u_n) est strictement ……………
- Si …………… alors la suite (u_n) est strictement ……………





2.4. Définition :

Dans le cas d'une suite arithmétique, on parle d'une évolution ……………

La représentation graphique sont des points ……………

3. Suites géométriques :(vidéo 3)

3.1. Rappels :

Définition :

Une suite géométrique (u_n) est définie par la donnée d'un …………… , d'une raison …………… et de la formule de récurrence : ……………

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$

3.2. Terme général d'une suite géométrique :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , alors ……………

Exemple :

On définit la suite (u_n) définie pour tout entier n , tel que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 \times u_n \end{cases}$

On observe que (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$,

donc $u_n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3.3. Terme général quand on ne connaît pas u_0 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$, alors pour tout entier naturel n et p, on a $u_n = \dots\dots\dots\dots$

Exemple :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 2$, tel que $u_7 = 4{,}2$. Déterminer l'expression de son terme général.

Rédaction :

On sait que (u_n) une suite géométrique alors pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

donc en particulier, ici : $u_n = \dots\dots\dots\dots\dots$

3.4.Sens de variation d'une suite q^n (vidéo 4)

Remarque :

Ce résultat est une conséquence des résultats trouvés avec les augmentations/réductions en pourcentage :

- Une suite géométrique de raison 0,7 revient multiplier par 0,7 chaque terme pour trouver le terme suivant. Or multiplier par 0,7 revient à …………….…………, %. Chaque terme de la suite est donc une …...…………, du précédent, de …….. %. Cette suite est naturellement …..
- Inversement, si $q>1$, cela revient à ……………, chaque terme d'un certain pourcentage. Si $q=1{,}1$, chaque terme de la suite est donc une ……………, du précédent de …… %. Cette suite est naturellement vers ……...

La suite géométrique de terme général $u_n=q^n$ est ◦ Strictement **……………** si $q\dots\dots\dots\dots\dots$ ◦ Strictement **…………,** si ....$<q<$....

Démonstration :

On calcule $u_{n+1}-u_n=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

On étudie le signe de $\dots\dots\dots\dots\dots$

- Si $0<q<1$, $q^n>0$ et $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots<0$, donc $q^n(q-1)\dots\dots\dots\dots\dots$ donc $u_{n+1}-u_n\dots\dots\dots\dots\dots$ et (u_n) est …………….
- Si $q>1$, $q^n>0$ et $(q-1)\dots\dots\dots\dots\dots$, donc $q^n(q-1)\dots\dots\dots\dots\dots$ donc $u_{n+1}-u_n\dots\dots\dots\dots\dots$ et (u_n) est …………….

Exemple :

Déterminer les variations de la suite (u_n) de terme général $u_n=0{,}7^n$

Rédaction :

On reconnaît la forme d'une suite ……………, $u_n=u_0\times q^n$ avec $u_0=\dots$ et $q=\dots$

D'après le résultat de cours, comme $q=0{,}7.\dots$, la suite $u_n=0{,}7^n$ est strictement ……………,.

3.5. Sens de variation d'une suite géométrique (vidéo 5)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0>0$ et de raison $q>0$. ◦ Si $q>\dots\dots$ alors la suite (u_n) est strictement ……………, ◦ Si $\dots\dots<q<\dots\dots$ alors la suite (u_n) est strictement ……………,

Démonstration :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0>0$ et de raison $q>0$.

On a alors $u_n=u_0\times q^n$ et $u_{n+1}-u_n=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\times q^n(q-1)$

Comme $\dots\dots\dots\dots\dots$, le signe de $u_{n+1}-u_n$ ne dépend que de $q^n(q-1)$ ce qui revient à la démonstration précédente.

Exemple :

Déterminer les variations de la suite (u_n) définie pour tout entier n par son terme général $u_n=0{,}4\times 1{,}2^n$

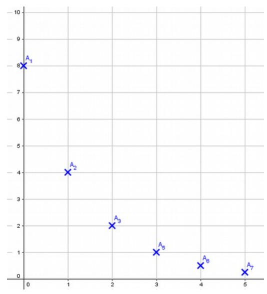
Rédaction :

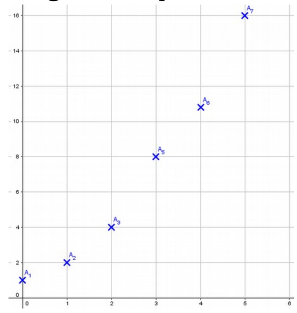
$u_n=0{,}4\times 1{,}2^n$ est l'expression du terme général d'une suite ……………, $u_n=u_0\times q^n$ avec de premier terme $u_0=\dots\dots\dots\dots\dots$, et de raison : $q=\dots\dots\dots\dots\dots$, .

On a $u_0 > 0$ et $q = \dots\dots\dots\dots\dots$. Par application du résultat de cours, la suite (u_n) est strictement ....

Remarque :

- Le cas où $u_0 < 0$ n'est pas au programme.
- De même, le cas où $q < 0$ n'est pas abordé. Avec une raison négative, les termes d'une suite géométrique sont de signes alternés. La suite n'est pas monotone.





3.6. Evolution d'une suite géométrique :

Définition :

Dans le cas d'une suite géométrique, on parle d'une croissance

(ou décroissance) ....

3.7. Limite d'une suite géométrique (vidéo 6)

Soit (u_n) une suite géométrique, définie pour tout entier n par son terme général $u_n = q^n$.
◦ Si $q > 1$ alors la suite (q^n) a pour limite .... quand n tend vers .... On note : $\dots\dots\dots\dots\dots$
◦ Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) a pour limite ……quand n tend vers .... On note : $\dots\dots\dots\dots\dots$

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n par son terme général $u_n = 0{,}4^n$

Rédaction :

$u_n = 0{,}4^n$ est l'expression du terme général d'une suite .... $u_n = q^n$ avec la raison : $q = \dots\dots\dots\dots\dots$.

On a $q = 0{,}4.\dots\dots$. Par application du résultat de cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dots\dots\dots\dots\dots = \dots..$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dots..$

Cas général:

Soit (u_n) une suite géométrique, de premier terme u_0 et de raison q :

	$0 < q < 1$	$q > 1$
$u_0 < 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 \times q^n = \dots..$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 \times q^n = \dots..$
$u_0 > 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 \times q^n = \dots..$	$\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 \times q^n = \dots..$

Exemple :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier n par son terme général $u_n = 250\,000 \times 0{,}9^n$

Rédaction :

$u_n = 250\,000 \times 0{,}9^n$ est l'expression du terme général d'une suite .... de premier terme ………… et de raison : $q = \dots\dots\dots\dots\dots$.

On a $\dots\dots q \dots\dots$ et $u_{0\dots\dots\dots}$. Par application du résultat de cours, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dots\dots\dots\dots\dots = \dots..$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dots..$

3.8. Algorithme de seuil :(vidéo 7)

Principe :

L'idée est d'utiliser un algorithme qui permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général d'une suite géométrique est inférieur ou supérieur à un seuil donné.
L'algorithme n'est jamais à rédiger complètement, il est souvent donné, éventuellement à compléter.

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $u_0=50000$
On se demande, s'il existe un entier p à partir duquel, on aura $u_n<30000$ pour tout $n>p$

Le terme général de (u_n) est donc, pour tout entier naturel n, de la forme : $u_n=$.............

Comme $0<0{,}96<1$ la suite (u_n) est .... et converge vers …….. : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots$
Comme $u_0=50000$, il existe bien un seuil à partir duquel on aura $u_n<30000$, c'est à dire , $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots<30000$
Il faut donc déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n>p$, $\dots\dots<30000$
L'idée est d'utiliser un algorithme :

$$
\begin{array}{l}
U \leftarrow 50000 \\
p \leftarrow 0 \\
\textit{Tant que } U \geq 30000 \\
\quad p \leftarrow p+1 \\
\quad U \leftarrow 0{,}96 \times U \\
\textit{Fin de Tant que}
\end{array}
$$

Pour lire l'algorithme, on peut s'aider d'un tableau :

	initialisation	Tour 1	Tour 2	Tour 3	Tour 4	….
U	……	……	……	……	……	...
p	……	……	……	……	……	...

Vous devez savoir programmer votre calculatrice, un tableur ou programmer

Sortie de l'algorithme :
Le programme affiche 13. Donc pour tout entier $n>\dots\dots$, on a $50\,000\times0{,}96^n<30000$

4. Somme de termes d'une suite géométrique

4.1. Somme de puissances consécutives (vidéo 8)

Si $q\neq1$ alors $1+q+q^2+q^3+\dots\dots+q^n=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Démonstration :

On effectue le produit : $(1+q+q^2+q^3+\dots\dots+q^n)\times(1-q)$:

$(1+q+q^2+q^3+\dots\dots+q^n)\times(1-q)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(1+q+q^2+q^3+\dots\dots+q^n)\times(1-q)=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$(1+q+q^2+q^3+\dots\dots+q^n)\times(1-q)=\dots\dots\dots\dots$

Comme $q \neq 1$, il vient $1+q+q^2+q^3+.....+q^n = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Exemple :

Calculer la somme des 7 premières puissances de 2 :

Rédaction :

On applique le résultat de cours $1+q+q^2+q^3+.....+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ avec $q = \ldots \ldots$ et $n = \ldots \ldots$

$$1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6 = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

4.2. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :(vidéo 9)

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q , et S_n la somme des n premiers termes de la suite : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ alors $S_n = \ldots \ldots \ldots \ldots \times \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Démonstration :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ donc $S_n = u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + ... + u_0 \times q^n = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Exemple :

Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 0{,}8$.

Rédaction :

D'après le cours, pour tout entier n , on a : $S_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On a donc ici : $S_{10} = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

5. Suites arithmético-géométriques :

5.1. Relation de récurrence :(vidéo 10)

Définition :

(u_n) est une suite arithmético-géométrique, si pour tout entier n , elle vérifie, à partir d'un premier terme u_0 donné , une relation de récurrence de la forme : $u_{n+1} = \ldots \ldots \ldots \ldots$, avec a et b deux nombres réels.

Exemple :

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier n , par la relation $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$

On a : $u_1 = \ldots \ldots \ldots \ldots$; $u_2 = \ldots \ldots \ldots \ldots$; $u_2 = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ etc.

On vérifie aisément qu'il n'y a pas de raison additive ni multiplicative. Cette suite n'est donc ni arithmétique, ni géométrique.

Remarque :

- Si $b = 0$, alors la relation de récurrence devient $u_{n+1} = a\,u_n$ et (u_n) est alors

  une suite …… de raison …… .

- Si $a=1$, alors la relation de récurrence devient $u_{n+1}=u_n+b$ et (u_n) est alors

  une suite …… de raison …….

5.2. Représentation graphique :(pas explicitement au programme) (vidéo 11)

Méthode à partir d'un exemple :

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier n , par la relation $\begin{cases} u_0=10 \\ u_{n+1}=0{,}5\times u_n+2 \end{cases}$

On reconnaît bien une suite arithmético-géométrique.

1. Recherche de la fonction associée :

Soit f la fonction associée à (u_n) telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ .On a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=0{,}5x+2$

2. Représentation graphique des fonctions :

Représenter dans le même repère la fonction f associée et de la fonction définie pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=x$.

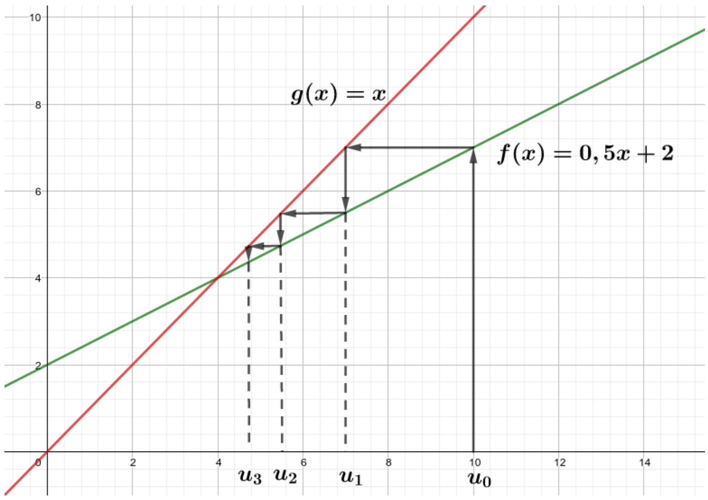
3.Algorithme de construction :

- Placer $u_0=10$ sur l'axe des abscisses
- Chercher ………………
- Pour placer u_1 sur l'axe des ………..,

  on cherche l'intersection avec la représentation

  de $g(x)=x$
- Placer $u_1=7$ sur l'axe des ……
- Chercher $u_2=$… … … … … …
- Pour placer u_2 sur l'axe des abscisses,

  on cherche l'intersection avec la représentation de $g(x)=x$ etc...



On observe graphiquement que la suite (u_n) semble tendre vers ………..

Attention, ceci n'est pas une démonstration. C'est une illustration.

5.3. Terme général d'une suite arithmético-géométrique (vidéo 12)

Il n'est pas au programme de savoir déterminer directement la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique.

C'est l'objet de nombreux exercices « classiques » qui guident la démarche. Le stratégie consiste à s'appuyer sur une suite géométrique « auxiliaire » (toujours donnée par l'énoncé) pour y arriver.

Application :(extrait annales)

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.

On estime que chaque année 85 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et que 12 mille nouvelles personnes souscriront un abonnement.
En 2015, il y avait 40 mille abonnés à cette revue.
On note a_n le nombre de milliers d'adhérents pour l'année $2015+n$; on a donc $a_0=40$.
1. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} en fonction de an .

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n > 0$.
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_n = 80 - 40 \times 0{,}85n$.

Exercice corrigé par Arie Yallouz :

EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. *Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.*
   Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.
   Donc pour tout entier n, $u_{n+1} = 1{,}002 \times u_n + 250$.

2. *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n, par $v_n = u_n + 125\,000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.*
   Pour tout entier n,
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125000 \\ &= 1{,}002 \times u_n + 125250 \\ &= 1{,}002 \times (u_n + 125000) \\ &= 1{,}002 \times v_n \end{aligned}$$
   Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1000 + 125000 = 126000$.

3. *Exprimer u_n en fonction de n.*
   (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126\,000$ donc pour tout entier n, $v_n = 126\,000 \times 1{,}002^n$.
   Donc pour tout entier n, $u_n = 126\,000 \times 1{,}002^n - 125000$.

4. *Étude de la suite (u_n).*
   a) *Variation*
   Pour tout entier n, $u_n = 126000 \times 1{,}002^n - 125\,000$. Par conséquent, pour tout entier n,
   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(126000 \times 1{,}002^{n+1} - 125000\right) - \left(126000 \times 1{,}002^n - 125000\right) \\ &= 126000 \times 1{,}002^{n+1} - 126000 \times 1{,}002^n \\ &= 126000 \times 1{,}002^n \times (1{,}002 - 1) \\ &= 252 \times 1{,}002^n \end{aligned}$$
   D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

   b) *Limite*
   Comme $1{,}002 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}002^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 126\,000 \times 1{,}002^n - 125000 = +\infty$.

   c) *Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?*
   On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > 15000$.
   L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15 000.

```
U ← 1000
N ← 0
Tant que U ⩽ 15000
    U ← 1,002 × U + 250
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

   La valeur de la variable N obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme est 53.
   Donc le capital disponible dépassera 15 000 € au bout de 53 mois.