I DÉCOUVERTE DE LA CONVEXITÉ

1 APPROCHE GRAPHIQUE

Courbure : Exercices 30 ;31 p 138 ; 64 p 141
Tangente et convexité : Exercices 34 ;35 ; 40 p 138

2 APPROCHE ALGÉBRIQUE

Dérivée seconde : Exercices 71 ;72 ;73 p 142 ; 80 et 82 p 142

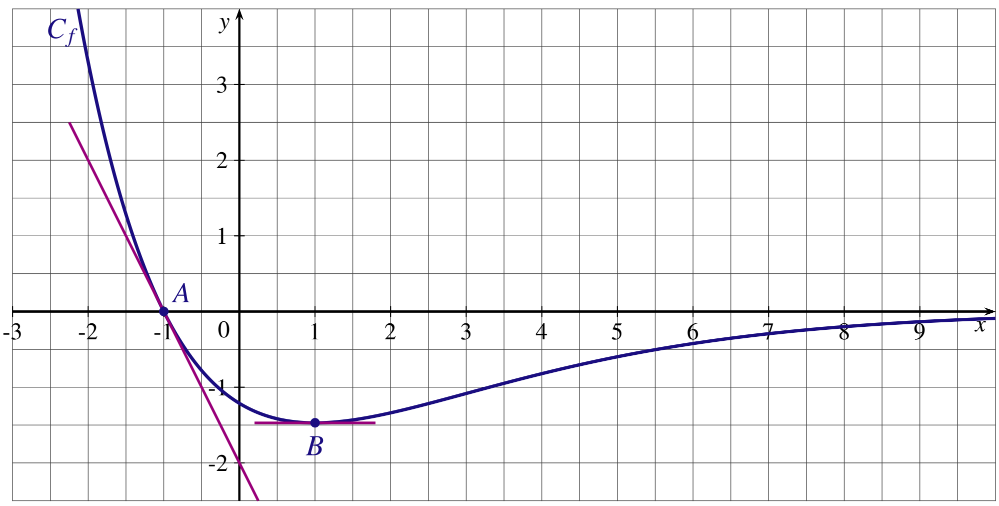
II EXERCICES DE SYNTHÈSE

EXERCICE 1

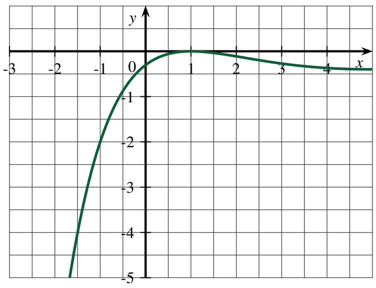
La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On sait que :

— la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0;-2)$;

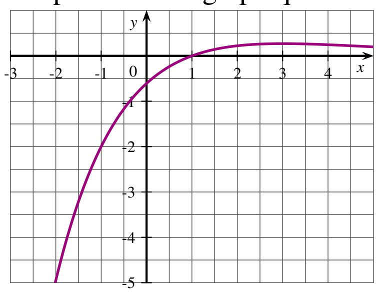
— la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses ;



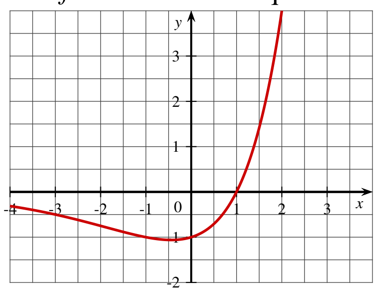
1. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



courbe C_1



courbe C_2



courbe C_3

EXERCICE 2

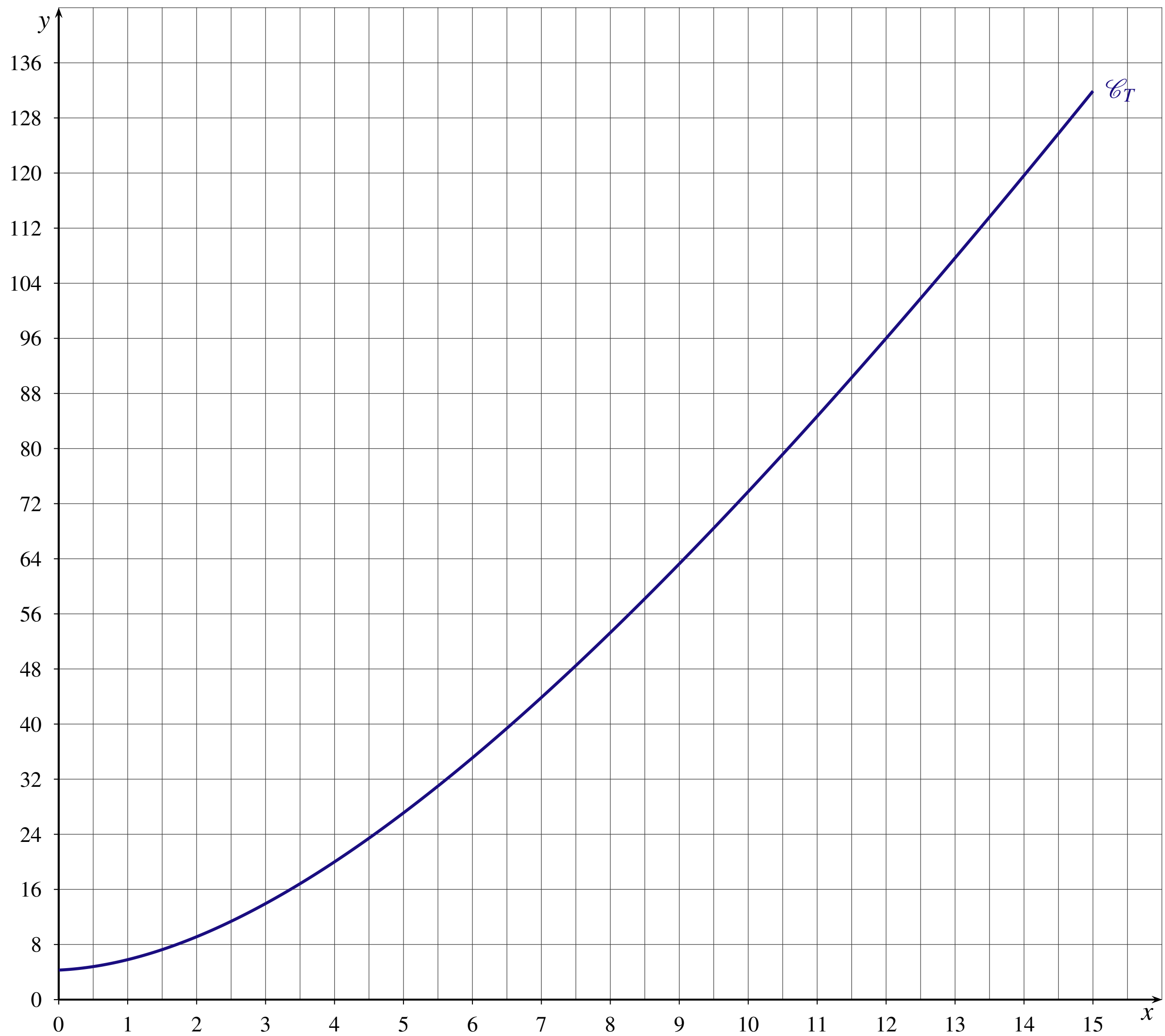
Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 15 000 articles.

Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois ; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $[0;15]$ par $C(x)=\dfrac{16x^2+11x+60}{x+14}$.

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$, est donnée en annexe ci-dessous.

1. Chaque article est vendu 8€, la recette mensuelle exprimée en milliers d'euros est donnée par $R(x) = 8x$
   a) Tracer sur le graphique joint en annexe, la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction R.
   b) Par lecture graphique :
      — les valeurs approximatives des bornes de l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
      — la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. Le bénéfice mensuel exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0;15]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.
   a) Calculer le montant en euros, du bénéfice si l'entreprise fabrique et vend 6000 articles un mois donné.
   b) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;15]$ on a $B'(x) = \dfrac{-8x^2 - 224x + 1474}{(x+14)^2}$.
   c) Étudier les variations de la fonction B.
   d) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $C'(x)$ où C' est la dérivée de la fonction C.
   Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

ANNEXE



EXERCICE 3

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3		1		5		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	-1

1. a) La fonction f est-elle continue sur $]-3;+\infty[$?
   b) Donner deux intervalles où f est continue mais pas monotone.
   c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   b) L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution unique ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f. Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.
   a) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5;+\infty[$
   b) $f'(-2) \times f'(0) \leqslant 0$
   c) $f'(-2) \times f'(3) \leqslant 0$

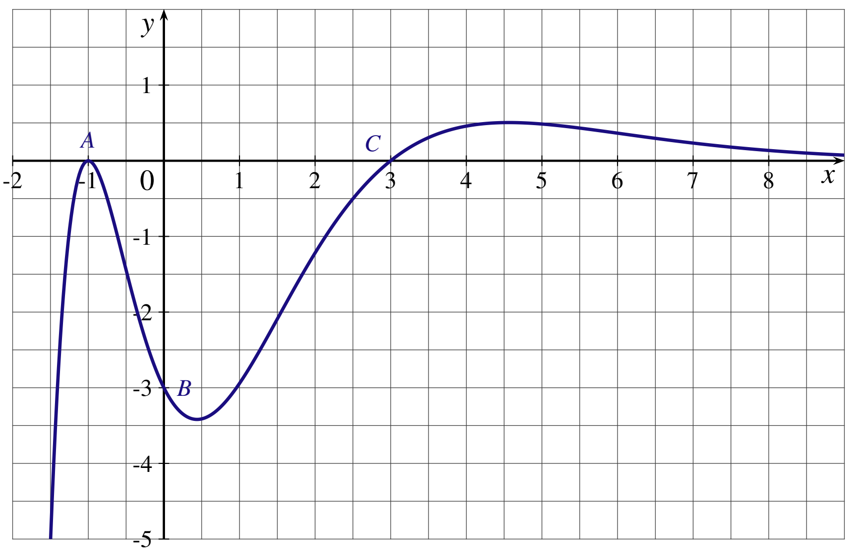
EXERCICE 4

Soit f la fonction définie $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x+1}$. On note f' sa dérivée.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 5

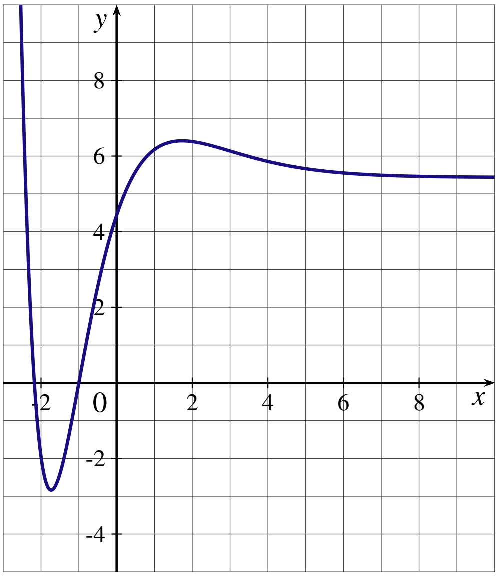
On considère une fonction f définie sur R et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé.
Les points $A(-1;0)$, $B(0;-3)$ et $C(3;0)$ appartiennent à la courbe.



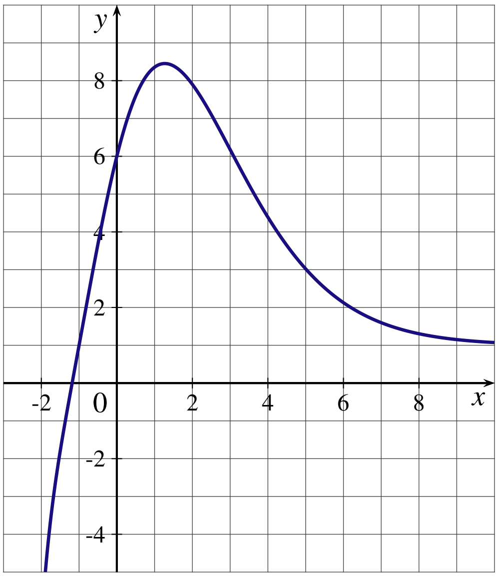
Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1

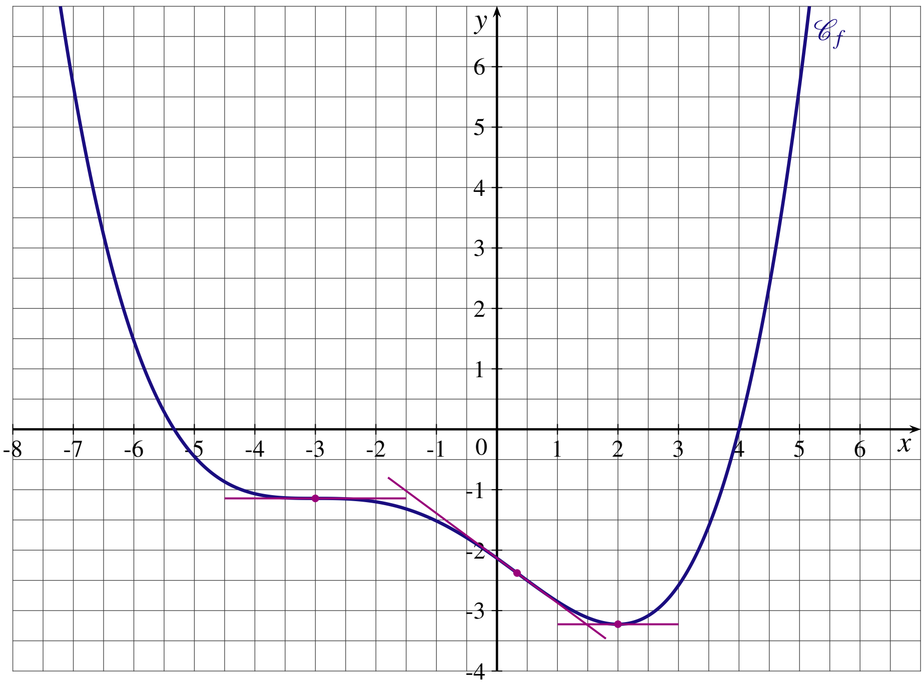


Courbe 2



EXERCICE 6

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.
À partir du graphique, déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $<$, $=$ ou $>$ est approprié :

$f(-6)\cdots 0$	$f'(-6)\cdots 0$	$f(-1)\cdots f(3)$	$f'(-1)\cdots f'(3)$
$f'(-6)\cdots f'(-1)$	$f'(-3)\cdots 0$	$f'(2)\cdots 0$	$f'(-7)\cdots f'(3)$
$f''(-6)\cdots f''(-1)$	$f''(-3)\cdots 0$	$f''(2)\cdots 0$	$f''(-1)\cdots f''(1)$

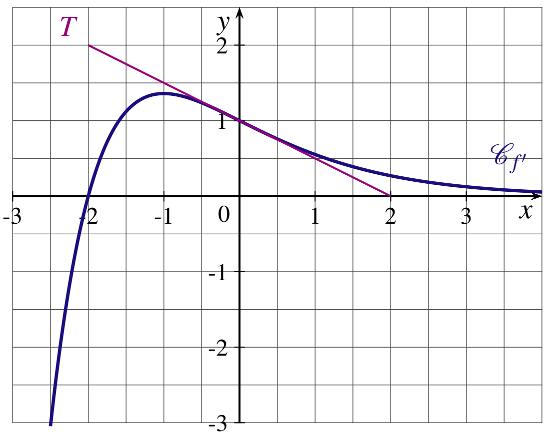
EXERCICE 7

Soit $P(t)$ la population d'une ville où t est en années et $P(t)$ est en milliers d'habitants.
Que signifient les énoncés suivants en ce qui concerne les signes de la dérivée et de la dérivée seconde ?

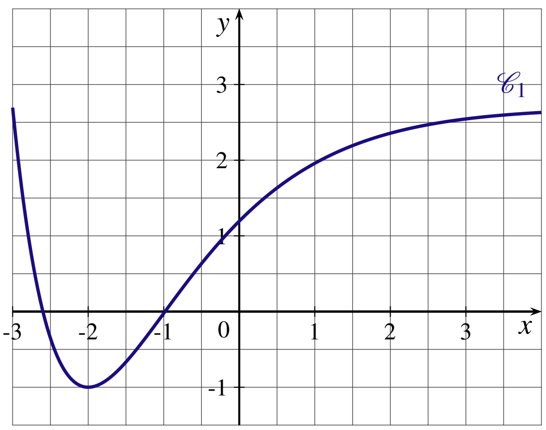
1. « La population a augmenté de moins en moins vite ».
2. « La population est restée stable les trois premières années ».
3. « La population diminue plus rapidement ».
4. « La population a augmenté au même taux ».

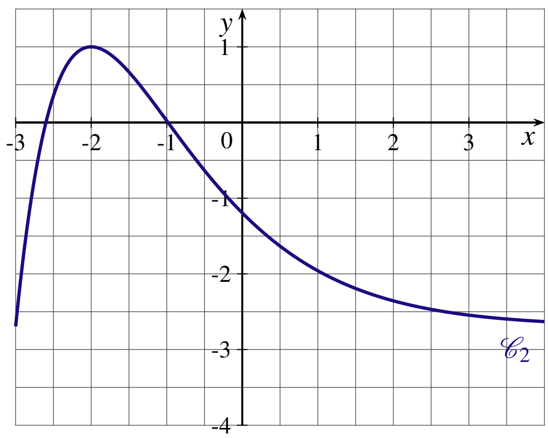
EXERCICE 8

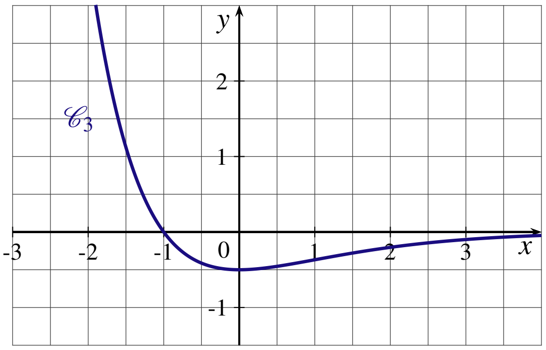
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathscr{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.

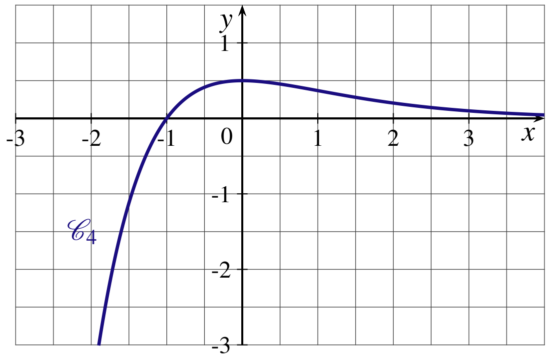


1. Par lecture graphique :
   a) Résoudre $f'(x) = 0$.
   b) Résoudre $f''(x) = 0$.
   c) Déterminer $f''(0)$.
2. Une des quatre courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''.









a) Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f''.

b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

c) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 9

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

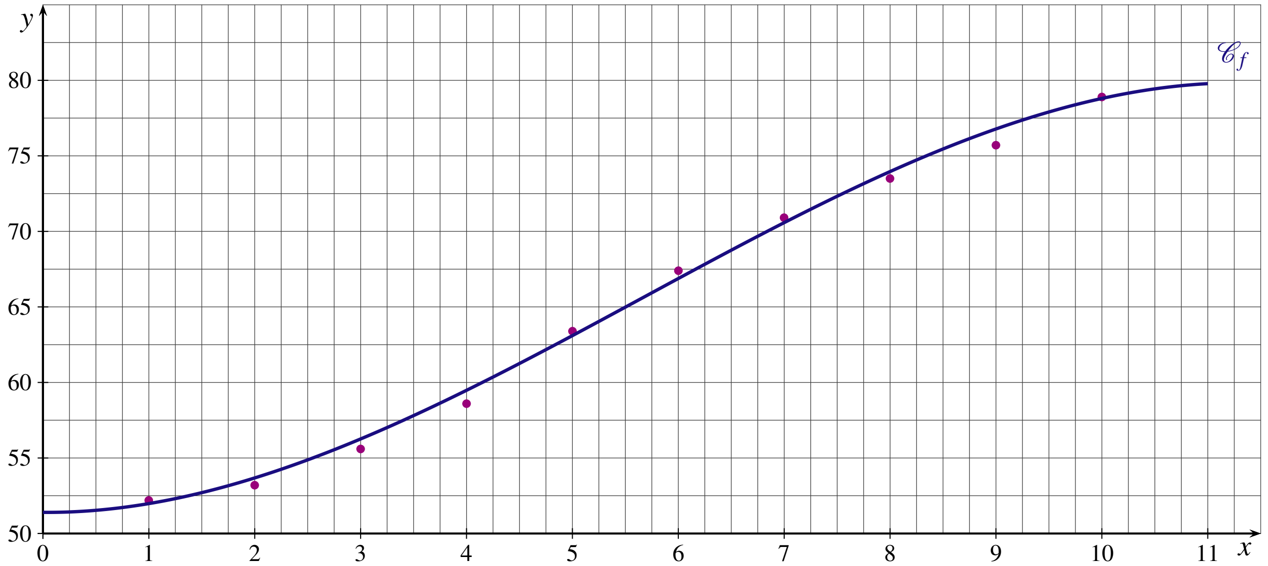
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;11]$ par :

$$f(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}68x^2 - 0{,}06x + 51{,}4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



1. a) Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.

   b) Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.

2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

   b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.

   c) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ?

3. Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f.
   Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2-x}{x^3}$.
   b) Donner le tableau des variations de la fonction f.
3. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ?
4. Montrer que l'équation $f'(x)=\dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;2]$.
   À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près, de α.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=-x^3+16{,}5x^2-30x+110$.
On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde.

1. a) Déterminer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. a) Déterminer $f''(x)$.
   b) Étudier la convexité de la fonction f.

PARTIE B

La fonction f, définie dans la partie A, modélise sur l'intervalle $[0;12]$, le cours d'une action sur une année.
x est le temps écoulé exprimé en mois et $f(x)$ est le cours de l'action en euros.

1. Sur un an, quel a été le cours le plus bas de cette action ? le cours le plus haut ?
2. À quel moment la croissance du cours de cette action s'est-elle ralentie ?

EXERCICE 12

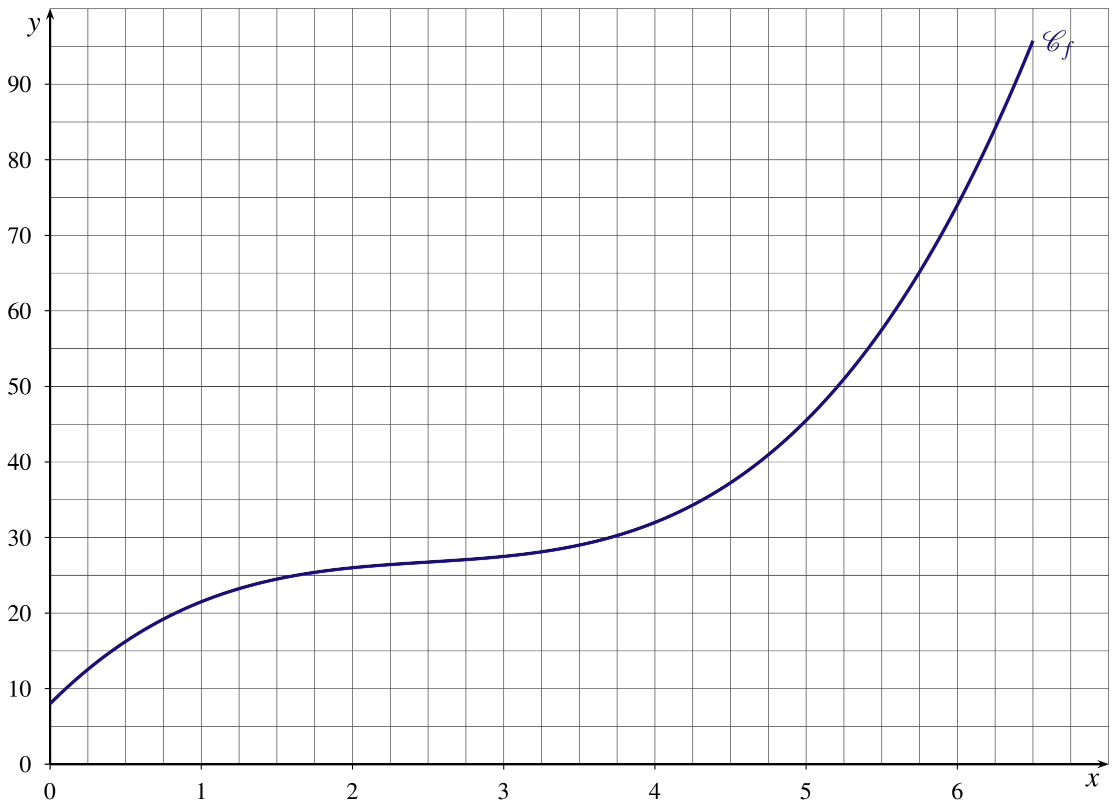
PARTIE A

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=x^3-7{,}5x^2+20x+8$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe $\mathscr{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées ?

PARTIE B

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0;6{,}5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.
La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle $]0;6{,}5]$, est donnée ci-dessous :



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :
   a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
   b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0\,;\,6{,}5]$ par $B(x) = 13{,}25x - f(x)$.
   a) Étudier les variations de la fonction B sur $]0\,;\,6{,}5]$.
   b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.
   Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

PARTIE C

Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0;6{,}5]$ par $C(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe $\mathscr{C}_f$.
   a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$
   b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C
2. On désigne par C' la dérivée de la fonction C.
   a) Montrer $C'(x) = \dfrac{(x-4)(2x^2+0{,}5x+2)}{x^2}$.
   b) Étudiez les variations de la fonction C.
   c) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?
3. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.