

Correction Sujets annales : Les suites arithmético-géométriques

Sujet Pondichéry 2018 - Bac ES-L

Exercice 3

5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel $n : u_{n+1} = 0,8u_n + 18$.

1. $u_1 = 0,8u_0 + 18 = 0,8 \times 65 + 18 = 52 + 18 = 70$ et $u_2 = 0,8u_1 + 18 = 0,8 \times 70 + 18 = 56 + 18 = 74$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 90$; donc $u_n = v_n + 90$.
 - a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0,8u_n + 18 - 90 = 0,8(v_n + 90) - 72 = 0,8v_n + 72 - 72 = 0,8v_n$
 $v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$.
 Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -25$.
 - b. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -25$ donc, pour tout entier naturel n ,
 $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0,8^n$.
 Or $u_n = v_n + 90$ donc, pour tout entier naturel n , $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que
ligne 4	$n \leftarrow n + 1$
ligne 5	$u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

- a. Pour que l'algorithme détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 85$, il faut le faire tourner tant que u_n est strictement inférieur à 85; la ligne 3 est donc :

ligne 3	Tant que $u < 85$
---------	-------------------

- b. En calculant à la calculatrice les termes successifs de la suite (u_n) , on trouve (valeurs arrondies au dixième) :

0	1	2	3	4	5	6	7	8
65	70	74	77,2	79,8	81,8	83,4	84,8	85,8

La valeur de n à la fin de l'exécution de l'algorithme est donc 8.

- c. On résout l'inéquation $u_n \geq 85$:

$$u_n \geq 85 \iff 90 - 25 \times 0,8^n \geq 85 \iff 5 \geq 25 \times 0,8^n \iff 0,2 \geq 0,8^n$$

$$\iff \ln 0,2 \geq \ln(0,8^n) \iff \ln 0,2 \geq n \times \ln 0,8 \iff \frac{\ln 0,2}{\ln 0,8} \leq n \text{ car } \ln 0,8 < 0.$$

$\frac{\ln 0,2}{\ln 0,8} \approx 7,21$ donc on retrouve $n = 8$ comme première valeur pour laquelle u_n dépasse 85.

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio. En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.

Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés;
 - chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.
- a. En juillet 2017, il y avait 65 particuliers qui avaient souscrit l'abonnement, ce qui correspond au terme de rang 0 de la suite (u_n) .
 Chaque mois, 20 % des abonnements sont résiliés, donc il en reste 80 %.
 Prendre 80 %, c'est multiplier par 0,8; il faudra donc multiplier par 0,8.
 Comme 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement, il faudra ensuite ajouter 18.
 On passe d'un mois n au mois suivant $n + 1$ en multipliant par 0,8 puis en ajoutant 18 donc la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout n , par $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$ modélise le nombre d'abonnés au panier bio.

- b. Chaque abonnement coûte 52 € par mois; le recette mensuelle le mois n est donc en euro de $52u_n$.
On cherche donc n pour que $52u_n$ dépasse 4 420 €. On résout l'inéquation :
 $52u_n > 4420 \iff u_n > 85 \iff n \geq 8$ (voir questions précédentes).
La recette mensuelle dépassera 4 420 € à partir de $n = 8$.
Sachant que $n = 0$ correspond au mois de juillet 2017, c'est donc à partir de mars 2018 que la recette mensuelle dépassera 4 420 €.
- c. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8; or $0 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.
Pour tout n , $u_n = v_n + 90$ donc la suite (u_n) a pour limite 90.
La recette étant de $52u_n$ pour le mois n , la recette mensuelle tend vers $52 \times 90 = 4680$ €.

Sujet Liban 2018 - Bas ES-L

Exercice 2

5 points

Maya possède 20 € dans sa tirelire au 1^{er} juin 2018.

À partir de cette date, chaque mois elle dépense un quart du contenu de sa tirelire puis y place 20 € supplémentaires.

Pour tout entier naturel n , on note u_n la somme d'argent contenue dans la tirelire de Maya à la fin du n -ième mois. On a $u_0 = 20$.

1. a. Elle dépense le quart des 20 euros de départ, donc il lui reste les trois quarts de la somme, soit 15 euros. Puis elle ajoute 20 euros. Donc elle aura 35 euros le mois suivant. Donc $u_1 = 35$.
- b. $u_2 = 0,75 \times 35 + 20 = 46,25$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 20$.

On considère l'algorithme suivant :

```

U ← 20
N ← 0
Tant que U < 70
    U ← 0,75 × U + 20
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N

```

- a. On complète le tableau ci-dessous qui retrace les différentes étapes de l'exécution de l'algorithme en arrondissant les résultats au centième :

Valeur de U	20	35	46,25	54,69	61,02	67,76	69,32	71,99
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Condition $U < 70$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

- b. Cet algorithme affiche la valeur $N = 7$; donc au bout du 7^e mois la somme disponible sera supérieure à 70 euros.
3. Pour tout entier n , on pose $v_n = u_n - 80$.
- a. Pour tout entier n , $v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = 0,75 \times u_n + 20 - 80 = 0,75 \times u_n - 60 = 0,75 \left(u_n - \frac{60}{0,75} \right) = 0,75 \times (u_n - 80) = 0,75 \times v_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
 - b. $v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80 = -60$.
 - c. Pour tout entier n , $v_n = v_0 \times q^n = -60 \times 0,75^n$.
De plus $u_n = v_n + 80 = -60 \times 0,75^n + 80 = 80 - 60 \times 0,75^n$.
 - d. Pour trouver le montant que Maya possèdera dans sa tirelire au 1^{er} juin 2019, on cherche la somme disponible fin mai 2019, ce qui correspond à $n = 12$: $u_{12} = 80 - 60 \times 0,75^{12} \approx 78,10$.
Maya aura dans sa tirelire le 1^{er} juin 2019 78,10 €.
 - e. La raison de la suite géométrique (v_n) est strictement comprise entre -1 et 1 , donc sa limite quand n tend vers l'infini est égale à 0.
 - f. Donc la limite de la suite (u_n) est égale à 80; cela signifie que le contenu de la tirelire va avoir tendance à se stabiliser vers 80 € au bout d'un certain temps.