Première ES

Correction du devoir maison n°1

Exercice n°1 :

1°) $y = x^2 - 4x + 5 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 5$. On utilise les formules du cours qui permettent de calculer $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$, et on écrit la forme canonique.

$x^2 - 4x + 5 = (x - \mathbf{2})^2 + \mathbf{1}$. Ainsi, les coordonnées du sommet S sont $(\alpha ; \beta)$ soit **(2 ; 1).**

2°) De la même façon que dans la question 1°), on montre que $f(x) = 2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$.

Ainsi, comme $a = 2$ est positif et $\alpha = 3$, f est décroissante sur $]-\infty ; 3]$ et croissante sur $[3 ; +\infty[$.

3°) $2x^2 + 16x + 14 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = 16$ et $c = 14$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 - 4\times2\times14 = 144$.

$\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16-\sqrt{144}}{2\times2} = -7$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16+\sqrt{144}}{2\times2} = -1$ S = $\{-7 ; -1\}$

4°) $Q = -x^2 - 12x + 28 = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = -12$ et $c = 28$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\times(-1)\times28 = 256$.

$\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-\sqrt{256}}{2\times(-1)} = 2$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+\sqrt{256}}{2\times(-1)} = -14$

Ainsi, $Q = a(x - x_1)(x - x_2) = -(x - 2)(x + 14)$

5°) $h(x) = -x^2 + 3x - 5 = ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 3$ et $c = -5$.

On calcule $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$, ou on écrit la forme canonique.

Ainsi, $-x^2 + 3x - 5 = -(x - 1{,}5)^2 - 2{,}75$

Comme $a = -1$ est négatif et $\alpha = 1{,}5$, h est croissante sur $]-\infty ; 1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		1,5		$+\infty$
Variation de h		↘	$-2{,}75$	↗	

Exercice n°2 :

1°) $g(x) = 2x^2 + 16x + 14$. Pour $x = 0$, $\mathbf{g(0) = 14}$.

2°) $g(x) = 2(x + 4)^2 - 18 = 2(x - \mathbf{(-4)})^2 - \mathbf{18}$. S(– 4 ; –18)

3°) $g(x) = 2(x + 1)(x + 7)$. **x = –1 ou x = –7**.

4°) $g(x) = 2(x + 4)^2 - 18$. Comme « a = 2 » est positif, $\alpha = -4$, g est décroissante $]-\infty : -4]$ puis croissante sur $[-4 : +\infty[$.

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
Variations de g		↘	-18	↗	

5°) $g(x) = 2(x + 1)(x + 7)$. « a = 2 » est positif et les racines sont -7 et -1. g(x) a le signe de « a > 0» à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-7		-1		$+\infty$
Signe de g(x)		+	0	–	0	+	

Exercice n°3 :

Les abscisses des points d'intersection de l'axe des abscisses et de la courbe représentative de la fonction f sont les solutions de $f(x) = 0$. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 5$, $b = 2$ et $c = -7$.

$\Delta = 2^2 - 4\times5\times(-7) = 144$. $\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{144}}{2\times5} = -1{,}4$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{144}}{2\times5} = 1$.

La représentation de f recoupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse $-1{,}4$ et 1.

Exercice n°4 :

Les fonctions ci-dessous sont de la forme $ax^2 + bx + c$, on peut donc calculer $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Ainsi, on les écrit sous la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ et on détermine l'extremum « β » en précisant s'il s'agit d'un maximum ou un minimum à l'aide des variations.

1°) $f(x) = 3x^2 + 4 = 3(x - 0)^2 + 4$. Le sommet de la parabole a pour coordonnées (0 ; 4). $a > 0$, f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$. Le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 4, et ce minimum est atteint pour $x = 0$.

2°) $g(x) = -2x^2 + 8x - 1 = -2(x - 2)^2 + 7$. Le sommet de la parabole a pour coordonnées (2 ; 7). $a < 0$, h est croissante sur $]-\infty ; 2]$ puis décroissante sur $[2 ; +\infty[$. Le maximum de g sur R est 7, et ce maximum est atteint pour $x = 2$.

Exercice n°5 :

1°) $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$, $b = 6$ et $c = -4$. On détermine la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. $f(x) = -2(x - 1,5)^2 + 0,5$.

Comme « $a = -2$ » est négatif, f est croissante sur $]-\infty ; 1,5]$ et décroissante sur $[1,5 ; +\infty[$

x	$-\infty$		1,5		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	0,5	$\searrow$	

2°) On calcule les racines du polynôme du second degré $-2x^2 + 6x - 4$.
$\Delta = 6^2 - 4\times(-2)\times(-4) = 4$, le polynôme admet deux racines distinctes $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$ et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -2(x - 1)(x - 2)$

3°) D'après 1°) le sommet de la parabole a pour coordonnées (1,5 ; 0,5).
On peut donc affirmer que la droite d'équation $x = 1,5$ (parallèle à l'axe des ordonnées passant par « S ») est un axe de symétrie pour la parabole qui représente f.

4°) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4 = -1$ équivaut à $-2x^2 + 6x - 3 = 0$. On cherche donc les racines du polynôme du second degré $P = -2x^2 + 6x - 3$ avec $a = -2$, $b = 6$ et $c = -3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 12$, $\Delta > 0$, P admet donc deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{12}}{2\times -2} = \frac{-6-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-3-\sqrt{3}}{-2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{12}}{2\times -2} = \frac{-6+2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-3+\sqrt{3}}{-2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation $f(x) = -1$ sont $x_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

5°) $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$. $f(x) \leq -3$ équivaut à $-2x^2 + 6x - 4 \leq -3$ soit $-2x^2 + 6x - 1 \leq 0$.
On cherche donc le signe du polynôme du second degré $Q = -2x^2 + 6x - 1$ avec $a = -2$, $b = 6$ et $c = -1$.

$\Delta = 28$. Comme $\Delta > 0$, Q admet donc deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{28}}{2\times -2} = \frac{-6-2\sqrt{7}}{-4} = \frac{-3-\sqrt{7}}{-2} = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{28}}{2\times -2} = \frac{-6+2\sqrt{7}}{-4} = \frac{-3+\sqrt{7}}{-2} = \frac{3-\sqrt{7}}{2}$. Q a le signe de « $a = -2$ » à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{7}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{7}}{2}$		$+\infty$
Signe de Q		$-$	0	$+$	0	$-$	

Conclusion : Les solutions de $f(x) \leq -3$ sont dans $]-\infty ; \frac{3-\sqrt{7}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{7}}{2} ; +\infty[$.

<u>*Exercice n°6 :*</u>

1°) $d(x) = mx + p$, avec $m = -1{,}5$ et $p = 43$, donc d est une fonction affine.
Comme « $m = -1{,}5$ », la fonction d est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2°) a) Pour $x = 12$, $d(x) = d(12) = -1{,}5\times12 + 43 = 25$. Pour un prix de repas de 12€, la demande est de 25 repas.
b) $f(x) = f(12) = -\frac{1}{12}12^2 + \frac{13}{3}12 - 29 = 11$. Pour un prix de repas de 12€, l'offre est de 11 repas. Le restaurateur ne pourra donc pas servir tous ces clients.
c) Pour $x = 22$, $d(x) = d(22) = -1{,}5\times22 + 43 = 10$ et
$f(x) = f(22) = -\frac{1}{12}22^2 + \frac{13}{3}22 - 29 = 26$. Pour un prix de repas de 22€, la demande est de 10 repas et l'offre est de 26 repas. Le restaurateur ne pourra donc pas vendre tous ces repas.

3°) Comme la fonction « d » est affine, elle est représentée par une droite (un segment sur [8 ; 22]). De plus, $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{1}{12}$, $b = \frac{13}{3}$ et $\alpha = -\frac{\frac{13}{3}}{2\times-\frac{1}{12}} = 26$.
Comme « a » est négatif, f est croissante sur $]-\infty ; 26]$ donc sur [8 ; 22].

4°) Le prix d'équilibre est l'abscisse du point d'intersection entre les courbes représentatives de « d » et de « f », soit 16 repas. On peut dire que pour un prix de 16 € par repas l'offre et la demande sont égales.

5°) On résout $d(x) = f(x)$, soit $-1{,}5x + 43 = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{13}{3}x - 29$ qui équivaut à
$\frac{1}{12}x^2 - (1{,}5 + \frac{13}{3})x + 72 = 0$ et $\frac{1}{12}x^2 - \frac{35}{6}x + 72 = 0$.
On recherche donc les racines du polynôme de second degré $\frac{1}{12}x^2 - \frac{35}{6}x + 72 = ax^2 + bx + c$ avec $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{35}{6}$ et $c = 72$. $\Delta = (-\frac{35}{6})^2 - 4\times\frac{1}{12}\times72 = \frac{361}{36}$
$\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines distinctes
$x_1 = \frac{-(-\frac{35}{6}) - \sqrt{\frac{361}{36}}}{2\times\frac{1}{12}} = 16$ et $x_2 = \frac{-\left(-\frac{35}{6}\right) + \sqrt{\frac{361}{36}}}{2\times\frac{1}{12}} = 54$ (n'appartient pas à [8 : 22])
<u>Conclusion</u> : Sur [8 ; 22], le polynôme s'annule uniquement pour $x = 16$. On retrouve que le point d'équilibre est atteint pour le prix de 16 € par repas.

6°) On résout l'inéquation $f(x) \geq d(x)$, soit $-\frac{1}{12}x^2 + \frac{13}{3}x - 29 \geq -1{,}5x + 43$ qui équivaut à $\frac{1}{12}x^2 - \frac{35}{6}x + 72 \leq 0$. On retrouve le polynôme de la question 5°) dont les racines sont 16 et 54. Comme « $a = \frac{1}{12}$ » est positif, le polynôme est positif à l'extérieur des racines et on obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		16		54		$+\infty$
Signes du polynôme		+	0	−	0	+	

Conclusion : Sur l'intervalle [8 ; 22], $f(x) \geq d(x)$ pour x dans l'intervalle [16 ; 22].
Cela signifie que pour un prix de repas compris entre 16 et 22€, l'offre est supérieure à la demande.