Continuité sur un intervalle

1. Rappels sur la dérivabilité :

1.1. Tangente à la courbe (vidéo 1)
Si une fonction f est dérivable sur I, on appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' définie sur I qui à tout antécédent a associe $f'(a)$, où $f'(a)$ est le **……………………………………..** à la courbe au point d'abscisse a.

Soit f une fonction définie sur un intervalle D et un point $M(a; f(a))$ tel que $a \in D$
La courbe représentative de la fonction f admet une tangente (T) au point M d'équation : …………………………...

Application :
f est une fonction dérivable sur $[-2; 3]$. On sait que $f(1) = 2$ et $f'(1) = -1$

1.2. Les Formules de dérivabilité : (vidéo 2)
On rappelle les formules de dérivations des fonctions de références :

- ➔ $f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée …………………….. définie sur $\mathbb{R}$
- ➔ $f(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée …………………….. définie sur $\mathbb{R}$
- ➔ $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ a pour dérivée …………………….. définie sur $\mathbb{R}^*$
- ➔ $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ a pour dérivée …………………….. définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un nombre réel.

- ➔ La fonction $u + v$ est dérivable sur I et sa dérivée est ……………………...
- ➔ La fonction $k \times u$ est dérivable sur I et sa dérivée est ……………………...
- ➔ La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et sa dérivée est ……………………...
- ➔ La fonction u^2 est dérivable sur I et sa dérivée est ……………………...
- ➔ La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est ……………………...
- ➔ La fonction $\frac{1}{v}$ dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est ……………………...

1.3. Sens de variations et extremum : (vidéo 3)

- ◆ Propriété :

Soit $f$une fonction définie et dérivable sur un intervalle, I alors :

- ➢ f est croissante sur Iéquivaut à dire que pour tout x de I, ……………………...
- ➢ f est décroissante sur I équivaut à dire que , pour tout x de I, ……………………...

- ◆ Propriété :
  - ➢ Si f admet un extremum local en x_0, alors ……………………...
  - ➢ Si la dérivée f' s'annule en x_0 ………………………, alors f admet un extremum local en x_0

Application :
Déterminer le sens de variation de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 1$.
La fonction admet-elle un maximum local ? Si oui, le préciser.

2. Continuité sur un intervalle :

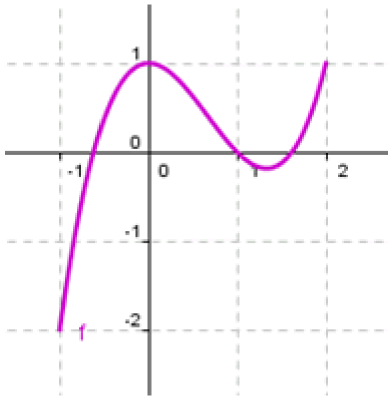
2.1. Définition : (vidéo 4)

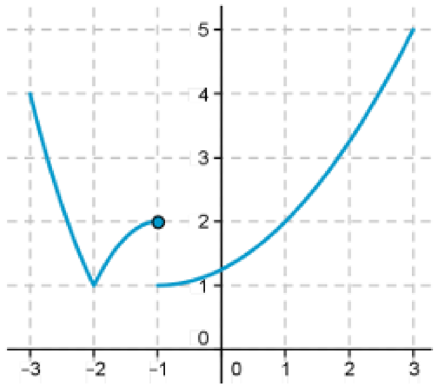
- Remarque :

La définition mathématique de la continuité d'une fonction sur un intervalle est hors programme. On se limitera ici à une définition intuitive et graphique qui nous suffira pour résoudre les problèmes proposés.

- **Définition** :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est …………….. sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I "…………………….…".





On dit que ……………………...

On dit que ………………………

Par contre, ……………………...

- Convention :

Dans un tableau de variations de fonction, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est ……………………... et strictement ……………………...

2.2. Propriété (admise)

- **Propriété :**

Une fonction ……………………... sur un intervalle I est aussi ……………………... sur I.

- Conséquence :

Dès qu'on sait qu'une fonction est dérivable sur un intervalle, on peut en déduire qu'elle est continue sur cet intervalle.
Par exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$
f étant une fonction polynôme, on sait qu'elle est …………….. sur $\mathbb{R}$ par conséquence, f est …………………… sur $\mathbb{R}$

- Attention :

La réciproque est fausse :
……………………...……………………...……………………... mais ……………………...……………………...

3. Utilisation de la continuité sur un intervalle :

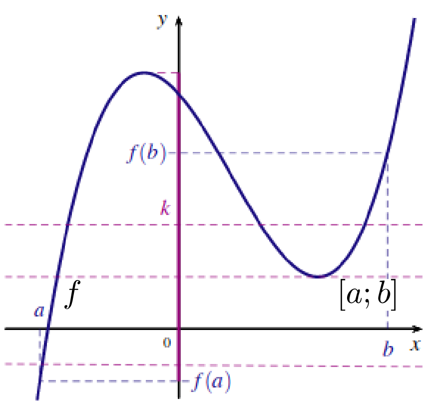
3.1. Théorème :

- **Théorème des valeurs intermédiaires : (vidéo 5)**

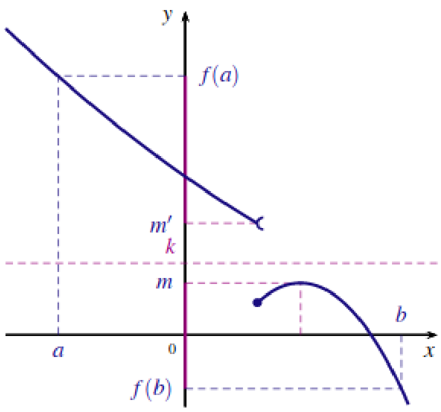
Si f est une fonction **continue** sur I, Si f est un nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
Alors ……………………...……………………...……………………...……………………...

Illustration :

La



…



……………………...……………………...   ……………………...……………………...
……………………...……………………...   ……………………...……………………...

<u>Application</u>
La fonction f vérifie le tableau de variation ci-dessous.
Montrer que l'équation $f(x) = 12$ admet au moins une solution sur $[-3; 7]$.

x	-3		1		2		7
$f(x)$	25	↘	10	↗	15	↘	8

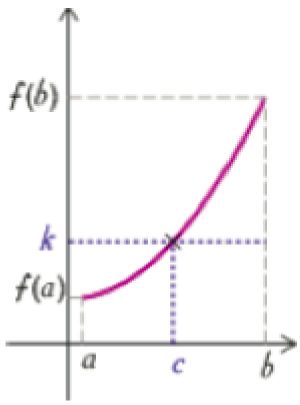
<u>3.2. Corollaire:</u>

<u>Propriété : (</u><u>vidéo 6)</u>
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a , b deux réels appartenant à I, tels que $a < b$.
Si f est ……………………...…………………….... sur $[a; b]$,
alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet……………………...……………………...

<u>Illustration :</u>

On a f une fonction continue et strictement croissante sur $[a; b]$,
elle est donc strictement monotone sur $[a; b]$

L'équation $f(x) = k$ admet donc une solution unique c appartenant à $[a; b]$.



<u>Application :</u>
La fonction f vérifie le tableau de variation ci-dessous.
Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $]-\infty; 3]$

x	$-\infty$		-1		3
f	3	↗	5	↘	-1