Continuité sur un intervalle

1. Rappels sur la dérivabilité :

1.1. Tangente à la courbe (vidéo 1)

Si une fonction f est dérivable sur I, on appelle fonction dérivée de f la fonction notée f' définie sur I qui à tout antécédent a associe $f'(a)$, où $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a.

Soit f une fonction définie sur un intervalle D et un point $M(a; f(a))$ tel que $a \in D$
La courbe représentative de la fonction f admet une tangente (T) au point M d'équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Application :
f est une fonction dérivable sur $[-2;3]$. On sait que $f(1) = 2$ et $f'(1) = -1$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 1.
On sait que $(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$ d'où ici :

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = -1 \times (x-1) + 2$$

$$(T): y = -x + 3$$

1.2. Les Formules de dérivabilité : (vidéo 2)

On rappelle les formules de dérivations des fonctions de références :

- ➔ $f(x) = ax + b$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée $f'(x) = a$ définie sur $\mathbb{R}$
- ➔ $f(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée $f'(x) = n \times x^{n-1}$ définie sur $\mathbb{R}$
- ➔ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ a pour dérivée $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$
- ➔ $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et k un nombre réel.

- ➔ La fonction $u + v$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(u+v)' = u' + v'$
- ➔ La fonction $k \times u$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(k \times u)' = k \times u'$
- ➔ La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et sa dérivée est $(u \times v)' = u'v + uv'$
- ➔ La fonction u^2 est dérivable sur I et sa dérivée est $u^2 = 2uu'$
- ➔ La fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- ➔ La fonction $\dfrac{1}{v}$ dérivable pour tout réel x de I vérifiant $v(x) \neq 0$ et sa dérivée est $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

Application :
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, définies sur $[1;10]$

$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 7$ $\quad g(x) = \dfrac{3}{x} - 4\sqrt{x}$ $\quad h(x) = \sqrt{x}(x-5)$ $\quad i(x) = \dfrac{4-3x^2}{7x+2}$

1.3. Sens de variations et extremum : (vidéo 3)

- ◆ Propriété :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle, I alors :

- ➢ f est croissante sur I équivaut à dire que pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$
- ➢ f est décroissante sur I équivaut à dire que , pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$

- ◆ Propriété :
  - ➢ Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$
  - ➢ Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0

Application :

Déterminer le sens de variation de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 1$.
La fonction admet-elle un maximum local ? Si oui, le préciser.

On calcule la dérivée de f : $f'(x)=3x^2-2x-2$
On étudie le signe de f' :
On résout $3x^2-2x-2=0$
$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-2)=4+24=28>0$

L'équation admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{2+\sqrt{28}}{6} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{2-\sqrt{28}}{6}$$

$$S=\left\{\frac{1+\sqrt{7}}{3};\frac{1-\sqrt{7}}{3}\right\}$$

x	$-\infty$		x_2		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘	$f(x_2)$	↗	$f(x_1)$	↘	

$$f(x_1)=-\frac{47+14\sqrt{7}}{27}\approx-3 \qquad f(x_2)=\frac{-47+14\sqrt{7}}{27}\approx-0{,}4$$

f s'annule et change de signe en x_2

D'après le tableau de variations, f admet donc un maximum local en $x_2=\frac{2-\sqrt{28}}{6}$ qui vaut

$$f(x_2)=\frac{-47+14\sqrt{7}}{27}\approx-0{,}4$$

2. Continuité sur un intervalle :

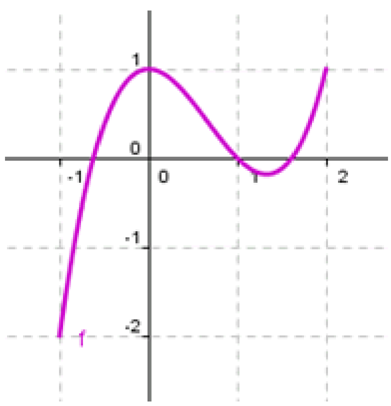
2.1. Définition : (vidéo 4)

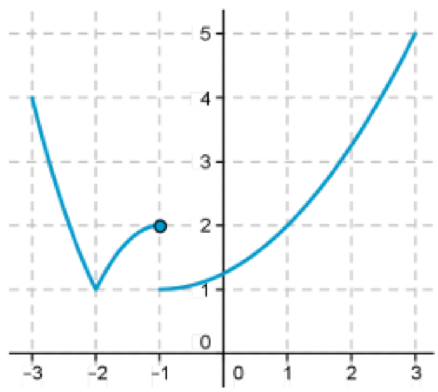
- Remarque :

La définition mathématique de la continuité d'une fonction sur un intervalle est hors programme. On se limitera ici à une définition intuitive et graphique qui nous suffira pour résoudre les problèmes proposés.

- **Définition** :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I *"sans lever le crayon"*.





On dit que *la fonction représentée* est continue sur [-1;2]

On dit que *la fonction représentée* *n'est pas continue* sur[-3;3]

Par contre, elle est continue sur [-3 ; -1]

- Convention :

Dans un tableau de variations de fonction, il est convenu que les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone

2.2. Propriété (admise)

- **Propriété :**

Une fonction dérivable sur un intervalle I est aussi continue sur I.

- Conséquence :

Dès qu'on sait qu'une fonction est dérivable sur un intervalle, on peut en déduire qu'elle est continue sur cet intervalle.
Par exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 1$
f étant une fonction polynôme, on sait qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ par conséquence, f est continue sur $\mathbb{R}$

- Attention :

La réciproque est fausse :
$f\ derivable\ sur\ I \Rightarrow f\ continue\ sur\ I$ mais $f\ continue\ sur\ I \nRightarrow f\ derivable\ sur\ I$

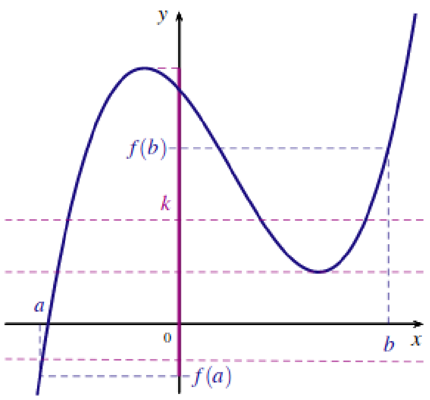
3. Utilisation de la continuité sur un intervalle :

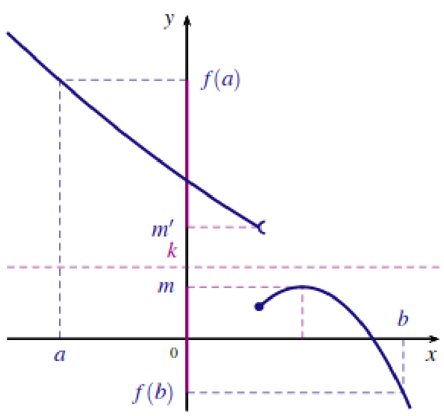
3.1. Théorème :

- **Théorème des valeurs intermédiaires :** (vidéo 5)

Si f est une fonction **continue** sur I, Si f est un nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
Alors l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution sur $[a;b]$.

Illustration :





La fonction f est bien continue sur $[a;b]$.
L'image de l'intervalle $[a;b]$ est donc un intervalle.
Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a;b]$.

La fonction f n'est pas continue sur $[a;b]$.

L'image de l'intervalle $[a;b]$ n'est pas un intervalle.

Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

Application

La fonction f vérifie le tableau de variation ci-dessous.
Montrer que l'équation $f(x) = 12$ admet au moins une solution sur $[-3;7]$.

x	-3		1		2		7
$f(x)$	25	$\searrow$	10	$\nearrow$	15	$\searrow$	8

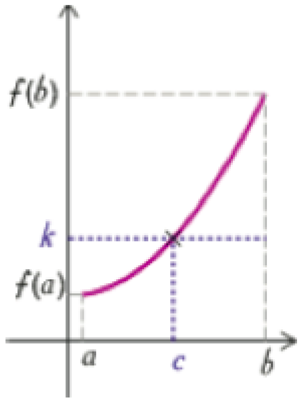
3.2. Corollaire:

Propriété : (vidéo 6)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a , b deux réels appartenant à I, tels que $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$,
alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique c appartenant à $[a;b]$.

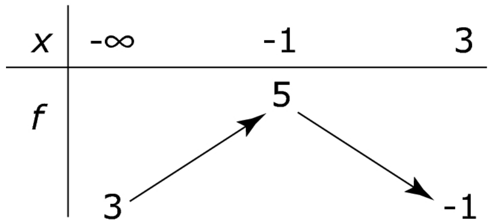
Illustration :

On a f une fonction continue et strictement croissante sur $[a;b]$,
elle est donc strictement monotone sur $[a;b]$

L'équation $f(x) = k$ admet donc une solution unique c appartenant à $[a;b]$.



Application :
La fonction f vérifie le tableau de variation ci-dessous.
Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $]-\infty;3]$



3.3. Cas particulier :(non traité en classe)

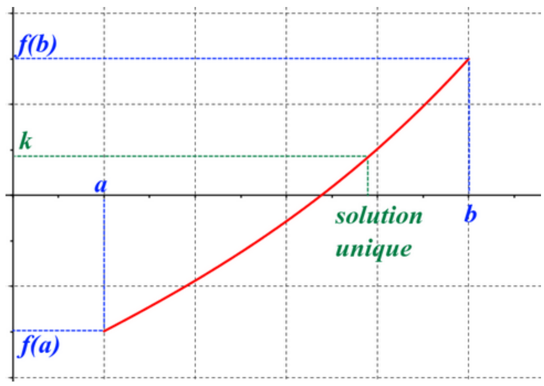
Propriété : (vidéo 7)
Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$
et $f(a) \times f(b) < 0$ (c'est à dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés),
alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a;b]$.

Illustration :

On a f continue et strictement croissante sur $[a;b]$ donc monotone sur $[a;b]$
On a aussi $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ donc on a bien $f(a) \times f(b) < 0$

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution
unique dans $[a;b]$.

C'est un outil pratique pour prouver qu'une équation complexe du type
$f(x) = 0$ possède une unique solution.



Application :

Montrer que l'équation $x^3 + x - 5 = 0$ admet une unique solution sur $[0;3]$, dont on donnera une valeur approchée au dixième.