Plan de travail : Les Matrices

Activité de départ :
Problème 1 p 264 (la lecture du cours du livre intégrée à l'exercice n'est pas indispensable)

Connaître la définition d'une matrice :

Vidéo 1 du cours

1. Comprendre et utiliser une matrice

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Connaître la définition d'une matrice :
<u>Obligatoire</u> :
Exercices 12 ; 13 ; 26 p 280
<u>Facultatif</u> : Exercice 27 p 280

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Vidéo 2 du cours

2. Connaître les matrices particulières

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Connaître et utiliser les matrices particulières :

Matrices particulières :
<u>Obligatoire</u> :
Exercice 1 :
Répondre à ces questions sans s'aider du cours :

1. Écrire I_4
2. Donner un exemple de matrice carrée ; de matrice colonne ; de matrice symétrique ; de matrice diagonale.
3. Donner un exemple de matrice carrée d'ordre 3 qui soit symétrique.

Exercices 14 ; 15 ; 16 ; 21 ; 22 ; 23 ; p 280
<u>Facultatif</u> : Exercice 20 p 280

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Additionner des matrices :

Vidéo 3 du cours

3. Savoir additionner deux matrices
4. Savoir multiplier une matrice par un réel et effectuer des calculs.

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Calculer des sommes de matrices :
<u>Obligatoire</u> : Exercices 28; 30; 32 p 280
<u>Facultatif</u> : Exercice 29 ; 31 ; 33;34;35 p 280

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

<u>Activité produit de matrices</u>
Problèmes 2 et 3 p 268

Multiplier les matrices :

Vidéo 4 -5 – 6 du cours

5. Savoir multiplier une matrice par une matrice colonne
6. Savoir multiplier deux matrices

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Calculer des produits de matrices :
Obligatoire :
Exercice 1 :
Dans les cas suivants, calculer si possible $A\times B$. Si ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}-2\\7\\-2\end{pmatrix} \;;\; A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}-2\\7\\-2\\5\\1\end{pmatrix}$$

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Exercice 2 :
Dans les cas suivants, calculer si possible $A\times B$. Si ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \;;\; A=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 1\\4 & 2\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Exercices 46; 48; 50; 52 p 282 et problème 5 p 274
Facultatif : Exercice bas page 269 et 53 ; 54p282 p 280

Calculer des puissances de matrices :

Vidéo 7 du cours
7. Savoir utiliser et calculer les puissances simples de matrices

Applications :
Obligatoire : Exercices 55 et 56 p 282

Inverses de matrices :

Vidéo 7-8 du cours
8. Déterminer si deux matrices sont inverses l'une de l'autre
9. Calculer une matrice inverse dans des cas très simples
10. Utiliser la calculatrice pour le calcul matriciel

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Applications
Obligatoire : Exercices 68; 69; 71 ; 72 ; 77 ; 78 p 284

Facultatif : Exercice 70 (vérification) ; 73 et 74 (calcul de l'inverse) et 79-80 (calculatrice) p 280

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Matrices et systèmes linéaires :

Vidéo 13-14 du cours
11. Résoudre une équation matricielle du type $AX=B$
12. Associer une équation matricielle à un système d'équations linéaires et inversement.

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Applications
Obligatoire : Exercices 90;91;95p 285 97 p 286

Facultatif : Exercice 70 (vérification) ; 73 et 74 (calcul de l'inverse) et 79-80 (calculatrice) p 280

Auto-évaluation	RR	R	V	VV

Exercices type Bac et Annales :

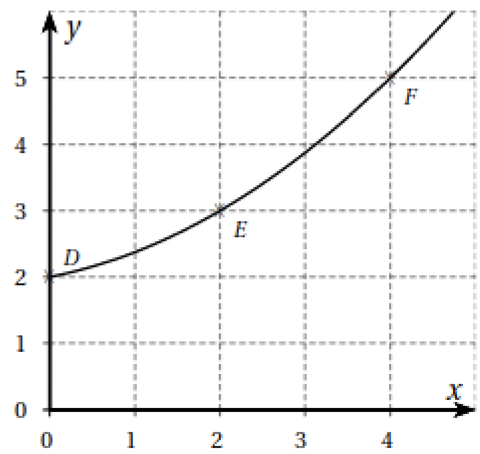
Exercice 1 : Polynésie, Juin 2017 (issu maths93)
Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS.
Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.
Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc.
Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.
Soit f la fonction définie par $f(x)=ax^2+bx+c$
, où a , b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le $x^{ième}$ jour.
1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a , b et c .
2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation

$A\times X=B$ avec : $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}8\\25\\80\end{pmatrix}$

3. Soit $M=\begin{pmatrix}0{,}5&-1&0{,}5\\-2{,}5&4&-1{,}5\\3&-3&1\end{pmatrix}$

3.a. Calculer $M\times A$
3.b. Que représente M pour la matrice A ?
4. A l'aide d'un calcul matricielle, déterminer les valeurs des nombres a , b et c
5. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2500 personnes.
Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours? Justifier la réponse

Exercice 2 : Amérique du Nord du 2 Juin 2015



Un créateur d'entreprise a lancé un réseau d'agences de services à domicile.
Depuis 2010, le nombre d'agences n'a fait qu'augmenter. Ainsi, l'entreprise qui comptait 200 agences au 1er janvier 2010 est passée à 300 agences au 1er janvier 2012 puis à 500 agences au 1er janvier 2014.
On admet que l'évolution du nombre d'agences peut être modélisée par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a , b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10
La variable x désigne le nombre d'années écoulées depuis 2010 et $f(x)$ exprime le nombre d'agences en centaines.
La valeur 0 de x correspond donc à l'année 2010.
Sur le graphique, on a représenté f
On cherche à déterminer la valeur des coefficients a , b et c
1.a. À partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.

1. b. En déduire que le système précédent est équivalent à : $MX=R$ avec $M=\begin{pmatrix}0&0&1\\4&2&1\\16&4&1\end{pmatrix}$; $X=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et R une matrice colonne que l'on précisera.

2. On admet que $M^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}125&-0{,}25&0{,}125\\-0{,}75&1&-0{,}25\\1&0&0\end{pmatrix}$

À l'aide de cette matrice, déterminer les valeurs des coefficients a , b et c , en détaillant les calculs.
3. Suivant ce modèle, déterminer le nombre d'agences que l'entreprise possédera au 1er janvier 2016.

Exercice 3 : d'après Bac 2015 Polynésie du 12 Juin 2015
Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail.
• Le tableau 1 indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches;
• Le tableau 2 indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	**Poste 1**	**Poste 2**	**Poste 3**		**Tableau 2**	
Modèle 1	8 h	10 h	14 h		**Poste 1**	25€/h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h		**Poste 2**	20€/h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h		**Poste 3**	15€/h

1. Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

1. a. Donner la matrice produit $P=H\times C$.
1. b. Que représentent les coefficients de la matrice $P=H\times C$?
2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :
Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650€

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a , b et c , permettant d'obtenir ces prix de revient.
2. a. Montrer que les réels a , b et c doivent être solutions du système :

$$H\times\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}$$

2.b. Déterminer les trois réels a , b et c .

Exercice 3 : (issu Arie yallouz)

Pour la fabrication de deux articles A et B, on distingue trois facteurs techniques de production : matières premières, travail et énergie.

Le tableau suivant indique les quantités d'unités de ces facteurs nécessaires à la production d'un article A et à celle d'un article B ainsi que la valeur estimée du coût de revient d'une unité de chacun de ces trois facteurs de production (*matières premières, travail et énergie*).

Facteurs techniques	Article A	Article B	Coût d'une unité du facteur (en euros)
Nombre d'unités de matières premières	6	5	8
Nombre d'unités de travail	3	4	5
Nombre d'unités d'énergie	3	2	4

On note :

— $F=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice dont les éléments sont les quantités de facteurs de production nécessaires à la fabrication des deux articles A et B.

— $C=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice ligne des coûts unitaires, en euros, des trois facteurs de production (*matières premières, travail et énergie*).

1. Calculer sous forme d'un produit de matrices, la matrice P des coûts de production de chaque article.
2. La marge bénéficiaire sur chaque article est un pourcentage du coût total de production. Elle est égale à 20 % pour l'article A et à 25 % pour l'article B.
   Soit $M=\begin{pmatrix} 1{,}20 & 0 \\ 0 & 1{,}25 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la marge bénéficiaire.
   À l'aide d'un produit de matrices, déterminer la matrice V des prix de vente de chaque article.
3. L'entreprise reçoit une commande de 15 articles A et 10 articles B.
   Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant total en euros de la commande.

Exercice 4 : (issu Chingatome)

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;10]$ par :

$$C(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+10 \quad \text{où } \left\{ \text{a, b et c sont des nombres réels.} \right.$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet $(a\,;b\,;c)$ est solution du système $(\mathcal{S})$.

$$(\mathcal{S}):\quad \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c &=& 1 \\ 27a+9b+3c &=& 17{,}4 \\ 125a+25b+5c &=& 73 \end{array}\right.$$

On pose : $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1. a. Ecrire ce système sous la forme $M\cdot X=Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a\,;b\,;c)$ solution du système $(\mathcal{S})$.

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites?