

# Cours sur les Matrices

## Savoir-faire du chapitre:

1. Comprendre et utiliser une matrice
2. Connaître les matrices particulières
3. Savoir additionner deux matrices
4. Savoir multiplier une matrice par un réel et effectuer les calculs.
5. Savoir multiplier une matrice ligne par une matrice colonne
6. Savoir multiplier une matrice par une matrice colonne
7. Savoir multiplier deux matrices
8. Savoir utiliser et calculer les puissances simples de matrices
9. Déterminer à la calculatrice le produit de deux matrices
10. Déterminer si deux matrices sont inverses l'une de l'autre
11. Calculer une matrice inverse dans des cas très simples
12. Déterminer à la calculatrice l'inverse d'une matrice
13. Résoudre une équation matricielle du type  $AX = B$
14. Associer une équation matricielle à un système d'équations linéaires et inversement.
15. Résoudre des problèmes, modéliser une situation avec les matrices.

1.

## Généralités sur les matrices

### 1.1. Qu'est-ce qu'une matrice ? (vidéo 1)

#### Définition :

Une ..... de taille  $m \times n$  est un tableau de nombres formé de  $m$  ..... et  $n$  .....

Les nombres figurant dans la matrice sont appelés les ..... de la matrice.

#### Exemple :

### 1.2. Matrices égales :

#### Propriété :

Deux matrices sont égales si, et seulement si,

elles ont la **même** ..... et ont **les** ..... placés aux mêmes positions.

#### Application :

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & a+3 \\ 4 & b-2 \end{pmatrix}$ .

Déterminer, si possible, les réels  $a$  et  $b$  tels que  $A = B$

#### Rédaction :

## 2. Matrices particulières : (vidéo 2)

### 2.1. Matrice carrée :

#### Définition :

Une matrice de taille ..... est appelée une .....

#### Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \text{et } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

### 2.2. Matrices lignes et colonnes :

#### Définition :

- Une matrice qui ne contient qu'une seule ..... est appelée une .....
- Une matrice qui ne contient qu'une seule ..... est appelée une .....

#### Exemple :

$$A = (1 \ 2 \ 3) \text{ est une } \dots\dots\dots \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ est une } \dots\dots\dots$$

Les ..... sont par exemple notés avec des matrices .....

### 2.3. Matrices identité :

#### Définition :

Une matrice carrée qui ne contient que des ..... sur sa ..... et des ..... ailleurs est appelée **matrice** .....

#### Exemple :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

### 2.3. Matrices diagonales :

#### Définition :

Une matrice carrée qui ne contient que des ..... sauf sur sa ..... est appelée **matrice** .....

#### Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \dots\dots\dots$$

### 2.4. Transposée d'une matrice :

#### Définition :

La ..... **d'une matrice**  $A$ , notée ..... est la matrice dont les ..... sont les ..... de  $A$ .

Exemple :

si  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ , alors .....

## 2.5. Matrices symétriques :

Définition :

On dit qu'une **matrice carrée** est ..... si elle est égale à sa .....

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 9 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$  .....

## 3. Opérations sur les matrices

### 3.1. Somme de matrices (vidéo 3)

Définition :

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices **de** .....

La somme de  $A$  et  $B$  est la matrice, notée  $A+B$ , dont les coefficients sont obtenus en ..... qui ont la même position dans  $A$  et  $B$ .

Exemple :

Si  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$  alors .....

### 3.2. Propriétés :

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois matrices **de même taille**.

- L'addition de matrices est ..... : .....
- L'addition de matrices est ..... : .....

### 3.2. Produit d'une matrice par un réel

Définition :

Soit  $A$  une matrice et  $k$  un nombre réel. Le produit de  $A$  par le réel  $k$  est la matrice, notée  $kA$ , dont les coefficients sont obtenus **en** ..... de  $A$  par  $k$ .

Exemple :

Si  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  alors  $2A = \dots\dots\dots$

Propriétés :

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même taille et deux réels  $k$  et  $k'$ .

- ..... (1)
- ..... (2)

Exemple :

Si  $M = 2(A - B) + 4A - 3B$

propriété .....

..... de ..... de matrices

propriété .....

3.3. Produit de matrices :

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne : (vidéo 4)

Soit  $A$  une matrice ligne à  $n$  colonnes et  $B$  une matrice colonne à  $n$  lignes :

Le produit de la matrice  $A$  par la matrice  $B$  est la matrice colonne à  $n$  lignes, notée  $A \times B$  est obtenue **en ....., dans l'ordre, le ..... de chaque coefficient de  $A$  par celui de  $B$ .**

Exemple :

$$A = (5 \quad 3 \quad 2) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ alors}$$

Remarque : On doit bien vérifier que .....

Produit d'une matrice par une matrice colonne : (vidéo 5)

Soit  $A$  une matrice de dimension  $n \times m$  et  $B$  une matrice colonne à  $m$  lignes :

Le produit de la matrice  $A$  par la matrice  $B$  est la matrice colonne à  $n$  lignes, notée  $A \times B$  est obtenue .....

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ alors}$$

Remarque :

On doit bien vérifier que le nombre de colonnes de ..... soit égal au nombre de .....

Produit de deux matrices

Soit  $A$  une matrice de dimension  $n \times p$  et  $B$  une matrice de dimension  $p \times m$

Le produit de la matrice  $A$  par la matrice  $B$  est la matrice de dimension  $n \times m$ , notée  $A \times B$ .

**Le produit de la matrice  $A$  par la matrice  $B$  est la matrice notée  $A \times B$  est obtenue en ..... successivement chaque ..... de  $A$  par la chaque ..... de la matrice  $B$ .**

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque :

La multiplication de matrices **n'est pas** ..... : .....

Exemple :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$B \times A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 + 2 \times 4 + (-1) \times 7 & 5 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 8 \\ 2 \times 3 + 6 \times 4 + (-3) \times 7 & 2 \times 1 + 6 \times (-1) + (-3) \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3.5. Puissance d'une matrice carrée (vidéo 7)

Définition :

Soit  $A$  une matrice carrée et  $n$  un entier naturel.

Le carré de  $A$  est la matrice, noté ....., égale à .....

Le cube de  $A$  est la matrice, noté ....., égale à .....

Plus généralement, .....

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

**4. Matrice inverse (vidéo 8)**

4.1. Multiplication par la matrice unité : (revoir 2.3 pour la définition)

Propriété :

Pour toute matrice carrée  $A$  de taille  $n$ , on a : .....

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ alors :}$$

On obtient de même  $I_2 \times A = \dots\dots\dots$

#### 4.2. Matrice inverse d'une matrice carrée

##### Définition :

Une matrice carrée  $A$  de taille  $n$  est une matrice  $\dots\dots\dots$  s'il existe une matrice  $B$  telle que  $\dots\dots\dots$

La matrice  $B$ , notée  $\dots\dots\dots$  est appelée la matrice  $\dots\dots\dots$  de  $A$ .

##### Remarque :

Toutes les matrices ne sont pas  $\dots\dots\dots$

##### Application 1: (vidéo 9)

La matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est-elle la matrice inverse de  $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  ?

Rédaction :

##### Application 2 : (hors programme) (vidéo 10)

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$  une matrice inversible. Déterminer  $A^{-1}$ .

Rédaction :

#### 4.3. Utilisation de la calculatrice pour effectuer des calculs matriciels (tutoriels d'Yvan Monka) (Vidéo 12) :

 Vidéo TI <https://youtu.be/8c4WDe1PSZk>

 Vidéo Casio <https://youtu.be/zq5OHgdTw34>

##### Exemple 1: (à la calculatrice)

On veut calculer le carré de la matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Exemple E: (à la calculatrice)

Déterminer à la calculatrice, l'inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient : .....

4.4. Résolution d'équations matricielles :(vidéo 13)

La solution de l'équation matricielle de la forme .....,  
avec  $A$  est une matrice carrée ....., de dimension  $n$ ,  $B$  une matrice colonne de dimension  $n$ ,  $X$   
une matrice colonne inconnue de dimension  $n$ ,  
est .....

Démonstration :

$$A \times X = B$$

Application :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -7,5 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Résoudre, à l'aide de la calculatrice, l'équation  $A \times X = B$

Résolution :

4.5. Application à la résolution de systèmes :(vidéo 14)

Exemple :

$$\text{Résoudre } \begin{cases} -2x + y + z = 7,5 \\ 4x + 3y + 2z = -0,5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \text{ est équivalent à résoudre } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,5 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Application :

$$\text{On considère le système (S) suivant : } \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 5x - 2y + 3z = 9 \\ -2x - 5y + 2z = -3 \end{cases}$$

Montrer qu'il est équivalent de résoudre une équation matricielle du type  $A \times X = B$ , puis trouver la solution à l'aide de votre calculatrice.

Rédaction :

Remarque :

Dans le contexte de la propriété précédente, si  $A$  n'est pas ..... alors le système correspondant possède ..... ou .....