Cours sur les Matrices

1. Généralités sur les matrices

1.1. Qu'est-ce qu'une matrice ? (vidéo 1)

Définition :

Une **matrice** de taille $m\times n$ est un tableau de nombres formé de m **lignes** et n **colonnes**.

Les nombres figurant dans la matrice sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Exemple :

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 .

On nomme parfois les coefficients a_{ij} où i est le rand de la ligne, et j celui de la colonne.

Ainsi a_{23} est le coefficient de la matrice de la ligne 2 et de la colonne 3.

On a alors : $a_{11}=1$ $a_{12}=2$ $a_{13}=3$

$a_{21}=4$ $a_{22}=5$ $a_{23}=6$

1.2. Matrices égales :

Propriété :

Deux matrices sont égales si, et seulement si,

elles ont la **même taille** et ont **les coefficients égaux** placés aux mêmes positions.

Application :

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & a+3\\ 4 & b-2\end{pmatrix}$.

Déterminer, si possible, les réels a et b tels que $A=B$

Rédaction :

On sait d'après le cours que deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même taille et ont les coefficients égaux placés aux mêmes positions.

On observe ici que A et B sont des matrices de même taille 2×2 .

On cherche les réels a et b tels que $A=B$:

Ce qui nous amène à résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues :

$\begin{cases}a+3=2\\ b-2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=7\end{cases}$ d'où $A=B$ si et seulement si $a=-1$ et $b=7$

2. Matrices particulières : (vidéo 2)

2.1. Matrice carrée :

Définition :

Une matrice de taille $n \times n$ est appelée une **matrice carrée**.

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice carrée puisqu'elle est de taille 2×3

$B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2×2

2.2. Matrices lignes et colonnes :

Définition :

- Une matrice qui ne contient qu'une seule colonne est appelée une **matrice colonne**.
- Une matrice qui ne contient qu'une seule ligne est appelée une **matrice ligne**.

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne. $B=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Les coordonnées de vecteurs sont par exemple notés avec des matrices colonnes.

2.3. Matrices identité :

Définition :

Une matrice carrée qui ne contient que des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs est appelée **matrice identité**.

Exemple :

$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2 et $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3

2.3. Matrices diagonales :

Définition :

Une matrice carrée qui ne contient que des 0 sauf sur sa diagonale est appelée **matrice diagonale**.

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

2.4. Transposée d'une matrice :

Définition :

La **transposée d'une matrice** A , notée ${}^tA$ est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A .

Exemple :

si $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

2.5. Matrices symétriques :

Définition :

On dit qu'une **matrice carrée est symétrique** si elle est égale à sa transposée.

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & 9 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique car ${}^tA=A$

3. Opérations sur les matrices

3.1. Somme de matrices (vidéo 3)

Définition :

Soit A et B deux matrices **de même taille.**

La somme de A et B est la matrice, notée $A+B$, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans A et B .

Exemple :

Si $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ alors $C=A+B=\begin{pmatrix} 3-1 & 1+2 \\ 4-3 & -1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.2. Propriétés :

Soit A , B et C trois matrices **de même taille.**

- L'addition de matrices est **commutative** : $A+B=B+A$
- L'addition de matrices est **associative** : $(A+B)+C=A+(B+C)$

3.2. Produit d'une matrice par un réel

Définition :

Soit A une matrice et k un nombre réel.

La produit de A par le réel k est la matrice, notée kA , dont les coefficients sont obtenus **en multipliant tous les coefficients** de A par k .

Exemple :

Si $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & -1\end{pmatrix}$ alors $2A=\begin{pmatrix}2\times3 & 2\times1\\2\times4 & 2\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\8 & -2\end{pmatrix}$

Propriétés :

Soit A et B deux matrices carrées de même taille et deux réels k et k'.

- $(k+k')A=kA+k'A$ (1)
- $k(A+B)=kA+kB$ (2)

Exemple :

Si $M=2(A-B)+4A-3B$

$\Leftrightarrow M=2A-2B+4A-3B$ propriété (2)

$\Leftrightarrow M=2A+4A-2B-3B$ commutativité de l'addition de matrices

$\Leftrightarrow M=6A-5B$ propriété (1)

3.3. Produit de matrices :

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne : (vidéo 4)

Soit A une matrice ligne à n colonnes et B une matrice colonne à n lignes :

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice colonne à n lignes, notée $A\times B$ est obtenue **en additionnant, dans l'ordre, le produit de chaque coefficient de A par celui de B.**

Exemple :

$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4\\1\\7\end{pmatrix}$ alors $A\times B=\begin{pmatrix}5\times4+3\times1+2\times7\end{pmatrix}=37\in\mathbb{R}$

Remarque : On doit bien vérifier que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B

Produit d'une matrice par une matrice colonne : (vidéo 5)

Soit A une matrice de dimension $n\times m$ et B une matrice colonne à m lignes :

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice colonne à n lignes, notée $A\times B$ est obtenue **en multipliant chaque ligne de A par la matrice B**

Exemple :

$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & -1\\7 & 8\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ alors $A\times B=\begin{pmatrix}3\times5+1\times2\\4\times5+(-1)\times2\\7\times5+8\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\18\\51\end{pmatrix}$

Remarque : On doit bien vérifier que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B

Produit de deux matrices (vidéo 6)

Soit A une matrice de dimension $n\times p$ et B une matrice de dimension $p\times m$

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice de dimension $n\times m$, notée $A\times B$.

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice notée $A\times B$ est obtenue en multipliant successivement chaque ligne de A par la chaque colonne de la matrice B .

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\\ 7 & 8\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

Soit A une matrice de dimension 3×2 et B une matrice de dimension 2×3 .

$A\times B$ est une matrice de dimension 3×3

$$\text{alors } A\times B=\begin{pmatrix}3\times5+1\times2 & 3\times2+1\times6 & 3\times(-1)+1\times(-3)\\ 4\times5+(-1)\times2 & 4\times2+(-1)\times6 & 4\times(-1)+(-1)\times(-3)\\ 7\times5+8\times2 & 7\times2+8\times6 & 7\times(-1)+8\times(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & 12 & -6\\ 18 & 2 & -1\\ 51 & 62 & -31\end{pmatrix}$$

Remarque :

La multiplication de matrices **n'est pas commutative** : $A\times B\neq B\times A$

Exemple :

$$B=\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 6 & -3\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & -1\\ 7 & 8\end{pmatrix}$$

B une matrice de dimension 2×3 et A une matrice de dimension 3×2

$B\times A$ est une matrice de dimension 2×2

ici, $A\times B$ et $B\times A$ n’ont pas les mêmes dimensions. Elles ne peuvent être égales.

Vérification :

$$B\times A=\begin{pmatrix}5\times3+2\times4+(-1)\times7 & 5\times1+2\times(-1)+(-1)\times8\\ 2\times3+6\times4+(-3)\times7 & 2\times1+6\times(-1)+(-3)\times8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -5\\ 9 & -28\end{pmatrix}$$

3.5. Puissance d'une matrice carrée (vidéo 7)

Définition :

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.

Le carré de A est la matrice, noté A^2 , égale à $A\times A$.

Le cube de A est la matrice, noté A^3 , égale à $A\times A\times A$.

Plus généralement, $A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n\text{ fois}}$

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $A^2=\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

4. Matrice inverse (vidéo 8)

4.1. Multiplication par la matrice unité : (revoir 2.3 pour la définition)

Propriété :

Pour toute matrice carrée A de taille n , on a : $A\times I_n=I_n\times A=A$

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ alors : $A\times I_2=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\times1+1\times0 & 3\times0+1\times1 \\ 4\times1+(-1)\times0 & 4\times0+(-1)\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=A$

On obtient de même $I_2\times A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=A$

4.2. Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition :

Une matrice carrée A de taille n est une matrice **inversible** s'il existe une matrice B telle que $A\times B=B\times A=I_n$

La matrice B , notée A^{-1} est appelée la matrice **inverse** de A.

Remarque :

Toutes les matrices ne sont pas inversibles.

Application 1: (vidéo 9)

La matrice $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice inverse de $B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$?

Rédaction :

On calcule $A\times B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad$ donc $A\times B=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_2$

On peut donc conclure que B n’est pas la matrice inverse de A

Application 2 : (hors programme) (vidéo 11)

Soit $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice inversible. Déterminer A^{-1} .

Appelons $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on sait d'après la définition de A^{-1} que $A^{-1}\times A=I_2$,

d'où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3a+4b & a-b \\ 3c+4d & c-d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases} 3a+4b=1 \\ a-b=0 \\ 3c+4d=0 \\ c-d=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} 3a+4b=1 \\ a=b \\ 3c+4d=0 \\ d=c-1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} 3a+4a=1 \\ a=b \\ 3c+4(1+c)=0 \\ d=c-1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{7} \\ a=b \\ 7c+4=0 \\ d=c-1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{1}{7} \\ b=\frac{1}{7} \\ c=\frac{-4}{7} \\ d=-\frac{11}{7} \end{cases}$

d'où $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}$

On vérifie que $A^{-1}\times A=I_2$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & -\frac{11}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.3. Utilisation de la calculatrice pour effectuer des calculs matriciels (Vidéo 12):

Exemple 1:

On veut calculer le carré de la matrice $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient : $A^2=\begin{pmatrix} 12 & -4 & 8 \\ 8 & -7 & 9 \\ 14 & -15 & 18 \end{pmatrix}$

Exemple 2:

Déterminer à la calculatrice, l'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ On obtient :_ $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0,5 & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

4.4. Résolution d'équations matricielles :(vidéo 13)

La solution de l'équation matricielle de la forme $A\times X=B$,
avec A est une matrice carrée inversible, de dimension n, B une matrice colonne de dimension n, X une matrice colonne inconnue de dimension n,
est $X=A^{-1}\times B$

Démonstration :

$A\times X=B$

$\Leftrightarrow A^{-1}\times A\times X=A^{-1}\times B$

$\Leftrightarrow (A^{-1}\times A)\times X=A^{-1}\times B$

$\Leftrightarrow I\times X=A^{-1}\times B$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$

Application :

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Résoudre, à l'aide de la calculatrice, l'équation $A \times X = B$

Résolution :

On utilise la calculatrice pour déterminer la matrice inverse de A et on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On sait alors que $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$

d'où : $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$ On effectue ce calcul à la calculatrice et on obtient : $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$

4.4. Application à la résolution de systèmes :(vidéo 14)

Exemple :

Résoudre $\begin{cases} -2x + y + z = 7{,}5 \\ 4x + 3y + 2z = -0{,}5 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ est équivalent à résoudre $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Application :

On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 5x - 2y + 3z = 9 \\ -2x - 5y + 2z = -3 \end{cases}$

Montrer qu'il est équivalent de résoudre une équation matricielle du type $A \times X = B$, puis trouver la solution à l'aide de votre calculatrice.

On pose : $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ -2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ On a bien $A \times X = \begin{pmatrix} -2x - y + z \\ 5x - 2y + 3z \\ -2x - 5y + 2z \end{pmatrix}$

et ainsi, le système peut s'écrire $A \times X = B$.

On utilise la calculatrice pour déterminer la matrice inverse de A et on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{16}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{29}{9} & \frac{4}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$

On sait alors que $A \times X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$ d'où : $X = \begin{pmatrix} \frac{11}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{16}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{29}{9} & \frac{4}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

On effectue ce calcul à la calculatrice et on obtient : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ or $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

La solution du système est donc le triplet $\{1 ; 1 ; 2\}$

<u>Remarque :</u>

Dans le contexte de la propriété précédente, si A n'est pas inversible alors le système correspondant possède une infinité de solutions ou aucune solution.